拓扑学的几何导引

[英] C. T. C. [illegible] 著

[illegible] 译

[illegible]

拓扑学的几何导引

[英] C. T. C. Wall 著

季文铎
张增喜 合译

高等教育出版社

本书是根据C. T. C. Wall著《A Geometric Introduction to Topology》（1972）一书译出的。此书是一本代数拓扑学的初等教程，它以欧氏空间中的点集为基础，避免使用单纯形，力图使预备知识减少到最低限度。

全书共有15章，主要内容有：空间和连续映射，Abel群，连通性，同伦，圆的研究，提升和扩张，计算群H'的例子，Eilenberg分离性判别准则，对偶映射，对偶定理的证明，Jordan曲线定理，进一步的对偶性质，几何的积分理论等。各章最后都有本章内容的进一步发展的介绍和文献，并挑选了一些练习和问题。

本书可供数学专业以及其他有关专业作教学用书和参考用书。

拓扑学的几何导引
[英] C.T.C.Wall 著
季文铎 张增喜 合译
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
开本850×1168 1/32 印张6.375 字数153 000
1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷
印数 00 001—3 010
ISBN 7-04-000331-7/O·92
定价 2.20 元

序 言

本书的目的是要提供一本的确适用于对大学生讲授代数拓扑的初等教程。尽管力图把必要的预备知识减少到最小限度，但在三年级前设置这门课程未必合适。

我摆脱了这门学科现有的许多处理方法，主要有两个方面：一是我没有以一般拓扑学教程为前提，而只是在Euclid空间中的点集上来阐述。其好处是无需许多定义即可举出解说性的例子，而且所用的点集的很多特殊性质（可度量性，特别是正规性和Hausdorff 性质）就不必分别讨论了。二是避免使用单纯形。我确信，采用单纯复合形的同调论的通常定义会写成一本不够理想的引论教程，因为在能够证明拓扑不变性之前，必须有一个冗长的发展过程。我只采用了那些不证自明的拓扑不变性概念；并且有效地运用了H^0和H^1的Čech定义以及H_0的奇异定义。

摆脱单纯复合形使我们回到研究一般点集的老传统。处理方法是双重的：首先引进几何观念，然后利用代数学逐步把它造成一种机构。虽然本书不是把范畴和函子形式地定义出来，但在每一阶段都强调了函子的性质。

本书的高峰，是平面上的 Alexander对偶定理的证明，它把Jordan曲线定理作为特殊情况包括在内。整个第一部分对此并非都是必要的。特别是我们虽然用了第 7 章中的一些结果，而其证明（比书中大部分内容都更难些）在初读时可以略去。后面的一些章节基本上尽力强调拓朴观念与纯数学的其它分支的关系。

在符合提供一个充实但又不过分快的叙述，而且至少获得一个真正有价值的结果前提下，我把本书的篇幅尽可能地缩短。正

是这个缘故，本书完全不写基本群。它应该是本书一个姐妹篇的合适的主题，但这个题材是如此之大，以致本身就需要写成一整本书，才能使学生真正有机会学到这方面若干有价值的东西。

各章之末都有简短的一节说明本章的内容如何可以进一步发展，并附有对此发展的参考文献。还挑选了一些练习和问题。那些打星号的要用到本书未曾包括的内容。

本书出自作者在剑桥和利物浦于1963—1967年的教学讲义。感谢 Frank Adams对本书的评论，它实际上改善了第Ⅱ和第Ⅲ部分的叙述方式。

英格兰，利物浦

1972．1．

C．T．C．Wall

目　录

第0部分　预备知识……1

第0章　记号和前提……1

数……1

集合……2

映射……3

等价关系……5

第1章　空间和连续映射……6

导言……6

连续性……6

同胚……9

邻域，开集和闭集……12

紧致性……18

练习和问题……22

第2章　Abel群……25

导言……25

定义……25

直和……28

例子……31

正合序列 ……………………………………………………33
自由Abel群 ……………………………………………………37
进一步的发展……………………………………………………43
练习和问题 ……………………………………………………43
第I部分 同伦论引论……………………………………………………46
第3章 连通的和不连通的空间……………………………………………………46
导言 ……………………………………………………46
连通性 ……………………………………………………46
道路连通性 ……………………………………………………48
局部道路连通性……………………………………………………52
例 ……………………………………………………53
进一步的发展……………………………………………………54
练习和问题 ……………………………………………………55
第4章 连通性的深入……………………………………………………57
导言 ……………………………………………………57
群H^0（X） ……………………………………………………57
集合π_0（X） ……………………………………………………58
群H_0（X） ……………………………………………………63
进一步的发展……………………………………………………64
练习和问题……………………………………………………64
第5章 同伦的定义……………………………………………………66
导言 ……………………………………………………66
同伦的定义……………………………………………………66
同伦等价 ……………………………………………………69

同伦集；群 $H^1(X)$ ……70
进一步的发展……73
练习和问题……73
第6章　圆的研究……75
导言……75
从S^1到R上的提升映射……75
映射度……78
应用……81
进一步的发展……83
练习和问题……83
第7章　提升和扩张问题……86
导言……86
提升问题……87
扩张问题……92
进一步的发展……96
练习和问题……97
第8章　计算……99
导言……99
Mayer-Vietoris定理……99
初步计算……102
图……106
乘积……108
进一步的发展……109
练习和问题……110

第Ⅰ部分　对偶定理……114
第9章　Eilenberg分离性判别准则……114
导言……114
余集的分支……115
用平面紧致集合分离点……116
进一步的发展……118
练习和问题……119
第10章　对偶映射……120
导言……120
对偶映射的构造……121
内射性的证明……123
进一步的发展……125
练习和问题……126
第11章　对偶定理的证明……128
导言……128
扩张定理……130
自然性质……133
对于一些特殊情况的证明……133
证明的完成……137
进一步的发展……138
练习和问题……139
第12章　关于证明的注释……141
导言……141

增广平面 …… 141
前几章的重述 …… 143
Hopf映射 …… 147
进一步的发展 …… 149
练习和问题 …… 149

第Ⅱ部分 平面点集拓扑学中进一步的结果 …… 151

第13章 Jordan曲线定理 …… 151
导言 …… 151
Theta曲线 …… 151
第一个另外的证明（依照Dieudonné的证法） …… 153
R_n和S^n中的点集 …… 156
第二个另外的证明（依照Doyle的证法） …… 159
（平面）区域的不变性 …… 159
进一步的发展 …… 161
练习和问题 …… 162

第14章 进一步的对偶性质 …… 164
导言 …… 164
群$H_1(X)$ …… 164
$H_1(X)$的性质 …… 167
对偶性 …… 169
平面区域 …… 170
进一步的发展 …… 172
练习和问题 …… 173

第15章　几何的积分理论 …… 176
导言 …… 176
R^2中的线积分 …… 176
Green定理 …… 177
借助同调语言的重述 …… 181
三维的情况 …… 184
复变量的情况 …… 185
进一步的发展 …… 187
练习和问题 …… 188
名词索引 …… 189
记号索引 …… 193

第0部分

预备知识

第0章　记号和前提

数

我们假定（读者）熟悉全体实数R的标准性质；特别是R的每个有界子集X有一个最小上界，或上确界$\sup X$，和一个最大下界，或下确界$\inf X$．Euclid空间R^n以n个实数的序列：$x=(x_1, \cdots, x_n)$作为它的点．例如原点是$0=(0, \cdots, 0)$．x_i称为点x的<u>坐标</u>．两个这样的点之间的距离由（Pythagoras）公式

$$d(x,x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2}$$

确定．它满足"三角不等式"

$$d(x,x')+d(x',x'')\geqslant d(x,x'').$$

全体复数C可看作在R^2中赋予了补充的乘法结构

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

通常我们将（0，1）记作i，将(x_1,x_2)记作x_1+ix_2，并常用z表示复数．$z=x_1+ix_2$的一些标准函数是

实部　$\mathrm{Re}\ z=x_1$，

虚部　$\mathrm{Im}\ z=x_2$，

模　$|z|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=d(z,0)$，

幅角　$\arg z=\theta$，以

$0\leqslant\theta<2\pi$，$\sin\theta=x_2/|z|$，$\cos\theta=x_1/|z|$

表示 θ 的特性。

全体整数的集合——正的、负的和零——用Z表示。

集合

通常用一个大写字母，例如X，表示集合。把X的成员x，记作$x\in X$。如果X是由具有性质 $P(x)$的“事物”x所确定的集合，记作

$X=\{x:P(x)\}$。

我们沿用习惯的集合论符号（假定读者已熟悉它们），即

$X\cup Y=\{x:x\in X$ 或 $x\in Y$ 或同时属于二者$\}$，称为X和Y的并，

$X\cap Y=\{x:x\in X$和$x\in Y\}$，称为X和Y的交，

$X-Y=\{x\in X:x$ 不属于$Y\}$，称为Y在X中的余集，以及

$Y\subset X$，如果Y的所有成员都属于X，即Y包含在X内。

X和Y称为不相交的，如果它们的交是空集$\varnothing$，即其中没有元素。当X是不言自明时，我们简单地把 $X-Y$ 叫做Y的余集（对于子集$Y\subset X$）。

对于某些特殊的集合，有标准的记号。对于实数的区间，如果$a<b$，我们记

$[a,b]=\{x\in R:a\leqslant x\leqslant b\}$，

$]a,b[=\{x\in R:a<x<b\}$，

$[a,b[=\{x\in R:a\leqslant x<b\}$，等等。

特别地，把标准单位区间记作 $I=[0,1]$，

$R^*=R-\{0\}=\{x\in R:x\neq 0\}$，

$R_+=[0,\infty[=\{x\in R:x\geqslant 0\}$，

$$\boldsymbol{R}_+^* =]0,\infty[= \boldsymbol{R}^* \cap \boldsymbol{R}_+.$$

在高维的情况，记

$D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n : d(x,0) \leqslant 1\}$ ，称为单位圆盘（或实心球）；

$S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n : d(x,0) = 1\}$，称为单位球面；以及，对于任意$x \in \boldsymbol{R}^n$，$r \in \boldsymbol{R}_+^*$，记

$$U(x,r) = \{y \in \boldsymbol{R}^n : d(x,y) < r\}.$$

一般，$\boldsymbol{R}^n$的一个子集称为有界的，如果它可以包含在某个$U(x,r)$中。

最后，对于任意两个集合X和Y，有(Descartes)乘积

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

不要把这个记号同$\{x, y\}$混淆起来，后者表示由两个元素x和y构成的集合。

映射

给定两个集合X和Y，从X到Y的一个映射f，使得X的每个元素x与一个完全确定的元素$f(x) \in Y$相对应。我们用$f: X \to Y$表示f是从X到Y的映射。我们并不坚持任何特殊的逻辑体系，仅仅强调一点，即使Y是Z的子集，也不认为f是从X到Z的映射（尽管它也确定一个映射）；映射的概念把集合X和Y包括进来作为其构成部分。X称为f的定义域，Y称为取值范围。如果f是用x的某个式子$f(x)$定义的，可把它记作

$$x \longmapsto f(x):$$

$f(x)$称为x在f下的象。

如果$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$，合成映射

$$g \circ f \text{（或简写作} gf\text{）}: X \to Z$$

的定义为

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

如果 $A\subset X$ 是一个子集，包含映射 $i:A\to X$ 的定义为：对于所有的 $a\in A$，$i(a)=a$. i 与 $f:X\to Y$ 的合成表示为

$$f|A:A\to Y,$$

并称它为 f 在 A 上的限制；而 f 称为 $f|A$ 的扩张. 包含映射的一个极明显的例子是恒同映射 $1_X:X\to X$；在不会发生混淆的时候，简单地用 1 表示. $f:X\to Y$ 的另一个极简单的例子是，选定 $y_0\in Y$，对于所有 $x\in X$，定义 $f(x)=y_0$. 这样的映射称为常值映射；它也可定义为（唯一的）映射 $X\to\{y_0\}$ 和包含映射 $\{y_0\}\to Y$ 的合成. 用（对于任意 X,Y）

$$p_1:X\times Y\to X,\ p_2:X\times Y\to Y$$

表示投影映射，其定义分别为 $p_1(x,y)=x$，$p_2(x,y)=y$.

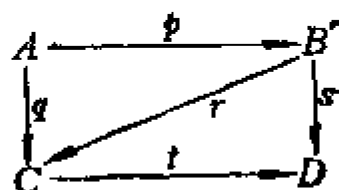
映射 $f:X\to Y$ 是内射[1]，如果 X 的不相同的元素有不相同的象，即如果

$$f(x)=f(x')\text{蕴涵}\quad x=x'.$$

映射 $f:X\to Y$ 是到上映射[2]，如果对于每个 $y\in Y$，存在 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$；既是内射又是到上映射的映射称为双射.

如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=1_X$，则 f 是内射，g 是到上映射. 相反，所谓选择公理是说，如果 g 是到上映射，则存在映射 f 使得 $g\circ f=1_X$. 而且 g 是双射当且仅当 f 是双射；这等价于 $f\circ g=1_Y$. 注意，如果 $g\circ f$ 是到上映射，则 g 也是到上映射；如果 $g\circ f$ 是内射，则 f 也是内射.

不同的集合间的映射图称为交换图，如果图中任意给定的一对集合间的合成映射都是相等的——例如，对于图



(1) 内射亦称单映射——译者注. (2) 到上映射亦称满映射—译者注.

就意味着$r\circ p=q, t\circ r=s$，以及(因而) $s\circ p=t\circ q$。

最后是两个记号，它们并不（象上面所有的那样）十分标准。给定集合X和Y，把$X\to Y$的所有映射的集合记作$\mathrm{Map}(X, Y)$（它是一个集合，这是集合论的公理）。其次，给定映射$f: X\to Y$和Y的子集B，定义

$$f^{\dashv}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}.$$

通常把它写作$f^{-1}(B)$，但这个记号给自身带来混乱：我们的记号是按Porteous的意见(Topological Geometry, North Holland)而采用的。如果A是X的子集，与通常一样，记

$$f(A)=\{f(a): a\in A\}.$$

等价关系

我们经常需要描述集合X的一个分解，即把X分成一系列子集$\{X_\alpha\}$，其中任何两个子集都没有公共的元素，即它们是分离子集。两个元素x，x'称为等价的，如果它们同属于一个子集X_α，并把这记作$x\sim x'$。则$\sim$有三条性质：

自反的　$x\sim x$（这就是说每个$x\in X$都在某个X_α中）。

对称的　$x\sim y$蕴涵$y\sim x$。

传递的　$x\sim y$和$y\sim z$蕴涵$x\sim z$。

反之，如果$\sim$有这些性质，它就称为一个等价关系，而上述X所分解成的分离子集称为等价类。

第1章　空间和连续映射

导言

在这一章内，我们尽可能以朴实的观点给出本书其他部分所需要的分析拓扑的内容。因而只讨论 R^n 的子空间，虽然许多读者可能已经接触过较一般的"拓扑空间"的定义。

连续性

拓扑学是从几何上研究连续性。当然，这可以公理化地进行，不过最重要和最有趣的问题是从对 Euclid 空间 R^n 的子集的研究而引起的。我们将简略地用空间一词表示某个Euclid 空间的一个子集。

如果 X 和 Y 是空间，$f:X\to Y$ 是函数，回忆一下分析中所说，所谓 f 在点 $x\in X$ 连续，是指如果给定任意正实数 ε，可以选取正实数 δ，使得若 $x'\in X$ 和 $d(x,x')<\delta$，则 $d(f(x),f(x'))<\varepsilon$。如果 f 在 X 的每个点处都连续，则称 f 为连续映射。

这个定义用起来实际上有点麻烦，而用下面所给的连续性的一些性质去进行论证，通常更方便些。第一条性质从定义就可以立刻得到。

C 1　设 $f:X\to Y$ 连续；又设 $X'\subset X$ 和 $Y'\subset Y$ 满足 $f(X')\subset Y'$；用 $f':X'\to Y'$ 表示 f 的限制，则 f' 是连续的。■

下一条性质更重要。

C 2　如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 连续。

证明　设 $x\in X$。我们要证明 $g\circ f$ 在 x 处连续。设 $\varepsilon>0$，因为

g 在$f(x)$处连续，故可以找到$\eta>0$使得对于$y\in Y$ 和 $d(y,f(x))<\eta$，有

$$d(g(y),\ g(f(x)))<\varepsilon.$$

又因为 f 在 x 处连续，故又可以找到 $\delta>0$，使得对于 $x\in X$ 和 $d(x,x')<\delta$，有

$$d(f(x'),f(x))<\eta.$$

因而，由上述（命$y=f(x')$），

$$d(g(f(x')),\ \ g(f(x)))<\varepsilon.$$

C 3　如果$X\subset Y$，则包含映射$X\to Y$是连续的。

这是显然的；取$\delta=\varepsilon$。

由此，取值范围与映射是否连续的问题无关：如果 $f:X\to Y'$，且$Y'\subset Y$（用包含映射 i），则根据C 1，$i\circ f$ 连续蕴涵 f 连续，而根据C 2 和C 3，f 连续蕴涵$i\circ f$连续。所以如果$Y\subset R^m$，只要查明 f 是否确定从X 到R^m的连续映射就足够了。

设$f:X\to R^m$。则由

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))\qquad (x\in X).$$

定义了分量映射$f_i:X\to R(1\leqslant i\leqslant m)$。

C 4　对于$f:X\to R^m$，f 连续当且仅当所有分量映射$f_i:X\to R$都连续。

证明　如果 f 连续，则对于给定的$x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，如定义中那样选取 δ。今

$$d(f(x),\ \ f(x'))=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}d(f_i(x),f_i(x'))^2}$$

$$\geqslant d(f_i(x),\ \ f_i(x')),$$

故如果$d(x,x')<\delta$，则

$$d(f_i(x),\ \ f_i(x'))<\varepsilon.$$

反之，如果每个f_i都连续，选取$\delta_i>0$，使得若$d(x,x')<\delta_i$，就有

$$d(f_i(x), f_i(x')) < \varepsilon/\sqrt{m}.$$

现在如果$d(x, x') < \delta = \min(\delta_i)$，则得到

$$d(f(x),\ f(x')) < \varepsilon. \blacksquare$$

我们需要初等分析的一些函数作为例子。

C 5　i）线性映射和常值映射　$R^n \to R$是连续的。

ii）乘法运算 $R^2 \to R$是连续的。

iii）x的正数幂给出连续映射$x \longmapsto x^a, R_+ \to R (a > 0)$。

iv）取倒数作为映射　$R^* R$ 是连$\longmapsto$继的。

v）指数，正弦和余弦函数 $R \to R$ 都是连续的。

vi）自然对数函数 $R_+^* \to R$　是连续的。

读者大概是熟悉这些例子的：这里不予证明。■

更有趣的或许是去看看，C1至C5如何蕴涵着用这些函数构造的其它函数的连续性。例如，如果 $f, g: X \longmapsto R$连续，则$f + g$，fg以及（如果 g 在X上总不为0）g^{-1}[1]也是连续映射$X \to R$。因为，根据C4，以 $x \to (f(x),\ g(x))$ 确定的映射 $X \to R^2$ 是连续的；又根据C5(i) 和(ii)，加法和乘法运算是连续映射 $R^2 \to R$；因而根据C2，运算映射[2]$f + g$和$fg: X \to R$ 仍然连续。如果在X上g总不为0，由C1得到一个连续映射$X \to R^*$，又根据C5(iv)，倒数是$R^* \to R$是连续的，所以根据C2，这二者的合成映射$g^{-1}: X \to R$是连续的。

如果$f_1, \cdots, f_n$是连续映射$X \to R$，则由归纳法可得f_i的任何多项式也是连续的。例如，如果$X \subset R$以及$x_1, \cdots, x_n$是坐标函

（1）这里g^{-1}指$1/g$——译者注。

（2）"运算映射"，原文为"composite map"，其意思是两个映射的和与积构成的映射——译者注。

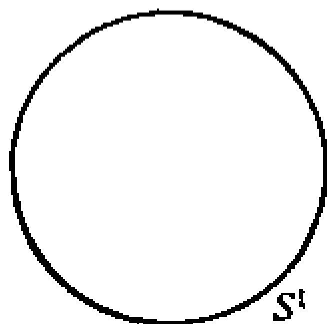
数，我们可以作x_i的任意多项式。如果有m个这样的多项式，则它们确定一个连续映射$X\to R^m$；如果它的象在$Y\subset R^m$内，则根据C1，得到连续映射$X\to Y$。类似地，但要更仔细一些，就可以证明更复杂例子的连续性。现在读者能够验证下面例子中所给出的映射的连续性了。

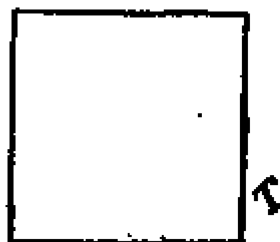
同胚

至此我们可以把"拓扑学是研究连续性的"这句话表达得更明确些了。假设给定两个空间X和X'以及连续映射$f:X\to X'$，$f':X'\to X$，它们是互逆的，即对于每个$x\in X$，有$f'(f(x))=x$；对于每个$y\in X'$，有$f(f'(y))=y$。则f和f'称为同胚，并称X和X'是同胚的或拓扑等价的，如果$f:X\to Y$的象是X'并且其限制是同胚$X\to X'$，则f叫做嵌入。（请注意：在一些老式的教科书中，把这样的f称为同胚。）

对拓扑学家来说，同胚的诸空间是不加区别的：它们全都有相同的拓扑性质，并且经常用一个名词表示——例如，同胚于$[0,1]$的任何空间都称做弧。作为另一个例子，拓扑学家说不出圆周和正方形的边界线之间的差别，二者都称为简单闭曲线，或Jordan曲线。

例（图1.1）





$S^1=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2=1\}$ $T=\{(x_1,x_2):|x_1|+|x_2|=1\}$

图 1.1

互逆的同胚$f:S^1\to T$和$f':T\to S^1$由

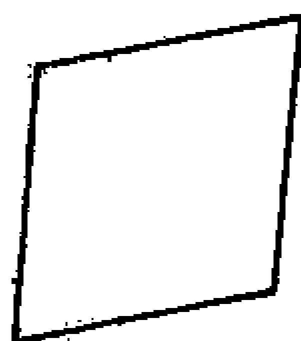
$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{|x_1|+|x_2|},\ \frac{x_2}{|x_1|+|x_2|}\right),$$

$$f'(x_1,\ x_2)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$$

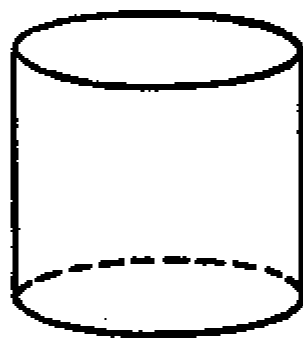
给出。■

例　图1.2中的三个空间是同胚的。因为如果

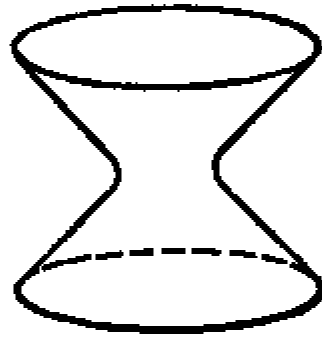
有孔平面X_1



圆柱面X_2



单叶双曲面X_3



$X_1=\{(x_1,\ x_2):(x_1,\ x_2)\neq(0,\ 0)\}$,

$X_2=\{(x_1,\ x_2,\ x_3):x_1^2+x_2^2=1\}$,

$X_3=\{(x_1,\ x_2,\ x_3):x_1^2+x_2^2-x_3^2=1\}$.

图　1.2

定义$h:X_1\to X_2$为

$$h(x_1,\ x_2)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \frac{1}{2}\log(x_1^2+x_2^2)\right)$$

则h连续。又下面的h'也是连续的，并且是h的逆：

$$h'(x_1,x_2,x_3)=(x_1e^{x_3},x_2e^{x_3}).$$

类似地，有$k:X_2\to X_3$及其逆k'：

$$k(x_1,x_2,x_3)=(x_1\sqrt{1+x_3^2},\ \ x_2\sqrt{1+x_3^2},\ \ x_3),$$

$$k'(x_1,x_2,x_3)=(x_1(1+x_3^2)^{-\frac{1}{2}},x_2(1+x_3^2)^{-\frac{1}{2}},x_3).$$

然而，拓扑学家非常明确地把上面描述过的圆S^1和空间

$$D^2=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\leqq 1\}$$

区分开来，后者称为实心球（或圆盘，或胞腔）。这两个空间看上去就不一样（见图1.3）。在第6章中将证明它们不是同胚的。

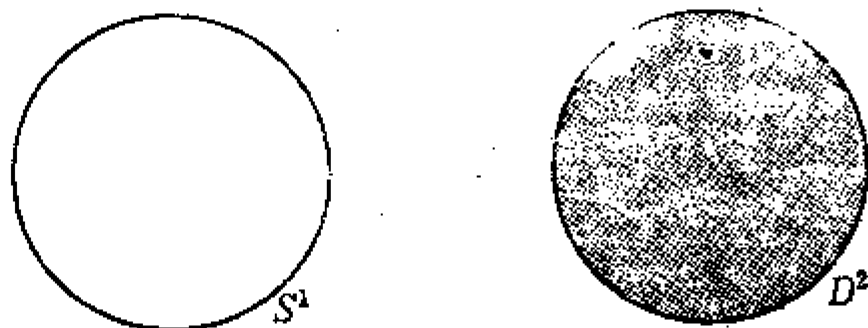


图 1.3

对于进一步的例子来说，乘积的概念是很有用的。如果$X\subset R^m$，$Y\subset R^n$，$X\times Y$定义为R^{m+n}中的点$(x_1,\cdots,x_{m+n})$的集合，其中$(x_1,\cdots,x_m)$确定X中的一点，$(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$确定Y中的一点。这种结构的拓扑性质作为练习留给读者。考察前面例子中的圆柱面，这就是乘积$S^1\times R$。下一个例子说明，对于这一类乘积，唯一的因子分解并不成立。

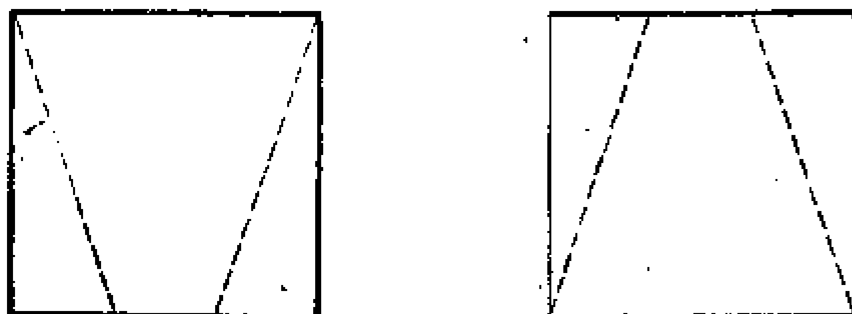


图 1.4

例 空间$]0,1[\times[0,1[$和$[0,1]\times[0,1[$是同胚的。如图1.4中虚线所示，把每个正方形分成三个区域。在这些

区域上分别定义 f 如下：

$$f(x_1, x_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{x_2}{3},\ 1-3x_1\right), & 3x_1+x_2\leqslant 1\\[2mm] \left(x_1+(1-2x_1)\left(\dfrac{2x_2-1}{2x_2+1}\right), x_2\right), & \\ \qquad 1-x_2\leqslant 3x_1\leqslant 2+x_2, & \\[2mm] \left(1-\dfrac{x_2}{3},\ 3x_1-2\right), & 3x_1-x_2\geqslant 2.\end{cases}$$

这是一个同胚，留给读者验证。

例　2×2 酉（复）矩阵的群U_2与$S^3\times S^1$同胚。定义 $f:S^3\times S^1\to U_2$为

$$f\{(x_0,x_1,x_2,x_3),(y_0,y_1)\}$$
$$=\begin{pmatrix} x_0+ix_1 & x_2+ix_3\\ -(y_0+iy_1)(x_2-ix_3) & (y_0+iy_1)(x_0-ix_1)\end{pmatrix},$$

和$g:U_2\to S^3\times S^1$为

$$g\begin{pmatrix} z_0 & z_1\\ z_2 & z_3\end{pmatrix}=\left\{(x_0,x_1,x_2,x_3),\quad (y_0,y_1)\right\},$$

其中

$$x_0+ix_1=z_0,$$

$$x_2+ix_3=z_1,$$

$$y_0+iy_1=z_0z_3-z_1z_2.$$

这些映射显然是连续的；留给读者去验证，它们的值域正是前面记号所表示的，以及它们是互逆的。■

邻域，开集和闭集

我们把连续性的定义再阐述一下，设X是一空间，$x\in X$。$x\in X$的（开）δ-邻域定义为

$$U_X(x,\delta)=\{x'\in X: d(x,x')<\delta\}.$$

如果不会发生混淆，就略去下标X。对于某个$\delta>0$，X的包含$U(x,\delta)$的任意子集称为x的一个邻域。X的一个子集称为（X中的）开集，如果它是自身每个点的一个邻域。

1.1 定理 设X，Y是空间，$f: X\to Y$。下述两条是等价的：

（1）f在$x\in X$处连续，

（2）对于$f(x)$在Y中的任意邻域N，$f^{-1}(N)$是x的一个邻域。

下述两条也是等价的：

（3）f连续，

（4）对于Y中的任意开集V，$f^{-1}(V)$在X中是开集。

证明 在刚刚引入的记号下，（1）的定义变成：给定$\varepsilon>0$，总能选择$\delta>0$，使得

$$f(U(x,\delta))\subset U(f(x),\varepsilon),$$

或等价地，

$$U(x,\delta)\subset f^{-1}(U(f(x),\varepsilon)).$$

δ的存在意味着$f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$是$x$的一个邻域。因而（2）蕴涵（1）。反之，如果假设后者成立，则因为$f(x)$的任意邻域N包含某个$U(f(x),\varepsilon)$，得到

$$f^{-1}(N)\supset f^{-1}(U(f(x),\varepsilon)),$$

故$f^{-1}(N)$是x的一个邻域。这就证明了（1）和（2）是等价的。

现在假设f连续，V是Y中的开集。为了证明（4）成立，必须证明$f^{-1}(V)$是自身每个点的邻域。如果$x\in f^{-1}(V)$，即$f(x)\in V$，我们知道V是$f(x)$的一个邻域。因为（2）成立，所以$f^{-1}(V)$是x的邻域。

为证明（4）蕴涵（3），需要一条引理。

1.2 引理 设X是一空间，$x \in X$和$\delta > 0$。则$U(x,\delta)$是X的开子集。

证明 我们必须证明$U(x,\delta)$是它自身每个点的邻域。设$y \in U(x,\delta)$。则$d(x,y) < \delta$。命$\varepsilon = \delta - d(x,y)$。则$U(y,\varepsilon) \subset U(x,\delta)$，因为如果$z \in U(y,\varepsilon)$，据三角不等式，有

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

$$< d(x,y) + \varepsilon = \delta。$$

这正如断言所要求，$U(x,\delta)$是y的一个邻域。■

回到定理的证明。假设（4）成立，我们必须证明对于X中的每一个x和$\varepsilon > 0$，

$$U = f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$$

是x的一个邻域。但$U(f(x),\varepsilon)$是开集，因而根据（4），U也是开集；又因为U是开集且$x \in U$，所以U是x的邻域。■

通常都把开集的概念作为拓扑的基石。现在根据前面的定义，导出开集的一些性质，这些性质用作一般拓扑学的公理基础。

1.3 命题 对于任意空间X，$\varnothing$和X在X中是开集；两个开集的交是开集，任意一族开集的并是开集。

证明 除了关于开集的交的断言外，其余那些都是定义的直接推论。设U，V在X中是开集，$x \in U \cap V$。则U和V是x的两个邻域；命$U(x,\delta) \subset U$和$U(x,\varepsilon) \subset V$。则

$$U(x,\min(\delta,\varepsilon)) \subset U \cap V,$$

故$U \cap V$是x的一个邻域。因为对于每个$x \in U \cap V$，这都是对的，所以$U \cap V$是开集。■

例　设$X\subset \mathbf{R}$是整数集合$\mathbf{Z}$。对于每个整数n和任意$\delta<1$，$\{n\}=U_Z(n,\delta)$。于是$\{n\}$是$\mathbf{Z}$的一个开子集。因而$\mathbf{Z}$的任何子集都是$\mathbf{Z}$的开集。一般地，一个空间称为离散的，如果它的所有子集都是开集。

因为任意开集族的并是开集，故对于任意$Y\subset X$，我们可以考虑X的包含在Y中的开子集的并。这是X的包含在Y中的最大开子集，把它称为Y的内部，记作$\mathrm{Int}(Y)$或$\mathrm{Int}_X(Y)$。因此，Y在X中是开集当且仅当它与$\mathrm{Int}_X(Y)$重合。X中既不是Y的内部也不是$X-Y$的内部的点集称为Y（在X中）的边界，记作$\mathrm{Fr}_X(Y)$。

X的子集F在X中是闭集，如果$X-Y$是开集。因而闭集的任何性质都可以通过开集来表述，反之亦然。例如，给定X的任意子集Y，存在X的包含Y的最小闭子集，把它称为Y在X中的闭包，记作$\mathrm{Cl}_X(Y)$。它是Y在X中的内部和边界的并。Y在X中是闭集当且仅当$Y=\mathrm{Cl}_X(Y)$。

对于任意空间X的非空子集Y和$x\in X$，记

$$d(x,Y)=\inf\{d(x,y):y\in Y\}.$$

1.4 引理　对于$x, x'\in X$，$|d(x,Y)-d(x',Y)|\leqslant d(x,x')$，因而$d(x,Y)$是$x$的连续函数。

证明　对于任意$\varepsilon>0$，取$y\in Y$使得

$$d(x',y)<d(x',Y)+\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} d(x,Y)&\leqslant d(x,y)\\ &\leqslant d(x,x')+d(x',y)\\ &<d(x,x')+d(x',Y)+\varepsilon. \end{aligned}$$

因为这对任意$\varepsilon>0$都成立，所以

$$d(x,Y) \leqslant d(x,x') + d(x',Y).$$

类似地，有

$$d(x',Y) \leqslant d(x,x') + d(x,Y).$$

这证明了第一个断言．第二个结论由连续性的定义直接可证（取 $\delta = \varepsilon$）．■

现在可以刻画闭包的特征了．

1.5 引理 设 X 是空间，Y 是其非空子空间，以及 $x \in X$．下述三条是等价的：

i) $x \in \mathrm{Cl}_X(Y)$．

ii) 包含 x 的任意开集都与 Y 相交．

iii) $d(x,Y) = 0$．

证明 直接看它们的否命题的等价性，则更容易些：

i)′ $x \notin \mathrm{Cl}_X(Y)$，即 $x \in \mathrm{Int}_X(X - Y)$．

ii)′ 对于某个开集 U，$x \in U \subset X - Y$．

iii)′ $d(x,Y) > 0$．

根据"内部"的定义，(i)′和(ii)′是等价的，又对于某个 U，(ii)′成立当且仅当对于某个 $\delta > 0$，

$$U_X(x,\delta) \subset X - Y,$$

此即

$$d(x,Y) \geqslant \delta\ .■$$

推论 如果 Y 在 X 中是闭集且 $x \in X - Y$，则 $d(x,Y) > 0$．■

在利用开集进行论证时，下面的引理常常是有用的．

1.6 引理 如果 X 是空间，$Y \subset X$，则 Y 的开（闭）子集都是形如 $A \cap Y$ 的子集，其中 A 在 X 中是开（闭）集．

证明 如果 A 在 X 中是闭集，且 $y \in Y$，则

$d(y,A\cap Y)=0$ 蕴涵 $d(y,A)=0$,

故$y\in A$，即 $y\in A\cap Y$. 因而 $A\cap Y$ 在Y中是闭集. 反之，如果B在Y中是闭集，命$A=\mathrm{Cl}_X(B)$. 则如果$y\in A\cap Y$，就有$d(y,B)=0$，又因为B在Y中是闭集，故$y\in B$. 因而$B=A\cap Y$. 对于开集的这个结果，通过取余集即可得到. ■

推论 如果Y在X中是开（闭）集，则Y的开（闭）子集在X中也是开（闭）集.

因为X的两个开（闭）子集的交仍然是开（闭）集. ■

下面介绍一个关于连续性的判断准则，在本书的其余部分要反复用到它.

1.7 定理 设X是空间，X_1和X_2是其闭子集使得$X=X_1\cup X_2$，又设映射$f:X\to Y$的限制$f_1:X_1\to Y$和$f_2:X_2\to Y$都连续. 则 f 连续.

证明 我们来证明f在每一点$x\in X$连续. 首先设$x\in X_1-X_2$. 因为f_1在x处连续，故对于任意$\varepsilon>0$，$f_1^{-1}(U(f(x),\varepsilon))$是$x$在$X_1$中的一个邻域. 不妨设它包含 $U_{X_1}(x,\delta)$. 根据引理1.5的推论，$d(x,X_2)>0$. 如果$\delta_1=\min(\delta,d(x,X_2))$，则

$$U_{X_1}(x,\delta)\supset U_X(x,\delta_1),$$

故在X中有x的一个邻域. $x\in X_2-X_1$的情况类似.

现设$x\in X_1\cap X_2$. 则我们可以假定

$$f_1^{-1}(U(f(x),\varepsilon))\supset U_{X_1}(x,\delta_1),$$

$$f_2^{-1}(U(f(x),\varepsilon))\supset U_{X_2}(x,\delta_2).$$

而对于并$U_{X_1}(x,\delta_1)\cup U_{X_2}(x,\delta_2)$，有

$$f^{-1}(U(f(x),\varepsilon))\supset U_{X_1}(x,\delta_1)\cup U_{X_2}(x,\delta_2)$$

$$\supset U_X(x,\min(\delta_1,\delta_2)).$$ ■

用归纳法可以证明，如果X是有限多个闭子集 X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的

并，相应的结论仍然成立。

紧致性

空间X称为紧致的，如果给定X中的任一开集族$\{U_\alpha\}$使得$X=\bigcup U_\alpha$，总能从中找到有限子族U_{α_1}，…，U_{α_n}，使得$X=U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}$。

上面的定义是实质性的。它刻画了紧致空间最重要的性质。然而，还有一个比较简单的特征。

1.8 定理 空间$X\subset R^n$是紧致的，当且仅当它是有界闭集。

我们将在一系列引理中给出定理的证明。

1.9 引理 设$X\subset Y$，且X紧致。则X是Y的闭子集。

证明 假定$y\in Y$，$y\notin X$。则对于每个$x\in X$，$d(x,y)>0$。集合

$$U_X\left(x,\frac{1}{2}d(x,y)\right)\text{对于}x\in X$$

在X中是开集，且它们的并正是X（因为每个$x\in Y$都属于以其自身为中心的圆盘）。因为X紧致，故能找到有限子族，相应地叫做x_1，…，x_n，它们的并也是X。因而对于任意$x\in X$，存在$i(1\leqslant i\leqslant n)$使得

$$x\in U_X\left(x_i,\ \frac{1}{2}d(x_i,y)\right).$$

于是$d(x,x_i)<\frac{1}{2}d(x_i,y)$，所以根据三角不等式，

$$d(x,y)\geqslant\frac{1}{2}d(x_i,\ y)\geqslant\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant n}d(x_i,y).$$

又据引理1.5，$y \notin Cl_Y X$。因为这对于所有的 $y \notin X$ 都成立，故 X 在 Y 中是闭集。■

推论 紧致空间 X 的子集 A 在 X 中是闭集，当且仅当 A 是紧致的。

因为引理指出，如果 A 是紧致的，则它在 X 中是闭集。反之，如果 A 是闭集，$\{U_\alpha\}$ 是 A 的一族开子集，且它们的并是 A，则对于每个 α，$A-U_\alpha$ 在 A 中是闭集，因而在 X 中也是闭集，故

$$X-(A-U_\alpha)=(X-A)\cup U_\alpha$$

在 X 中是开集。而且

$$\bigcup\{(X-A)\cup U_\alpha\}=(X-A)\cup(\bigcup U_\alpha)$$

$$=(X-A)\cup A=X.$$

因为 X 紧致，故可以挑选出有限多个 α_1，…，α_n 使得

$$X=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\{(X-A)\cup U_{\alpha_i}\}.$$

然而

$$A=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}U_{\alpha_i},$$

这证明 A 是紧致的。■

定理1.8的证明 首先假定 X 是紧致的。则根据引理1.9，它在 R^n 中是闭集。对于 $m>0$，开子集族 $X\cap U(0,m)$ 的并集为 X。因而可以找到有限子族，使它们的并集仍为 X。命它们分别对应于 m_1，…，m_k。如果 $N=\max(m_1, \cdots, m_k)$，则 $X\subset U(0,N)$，即 X 是有界的。

现在假定 X 是有界闭集，不妨设 $X\subset U(0,N)$，则 X 包含在方体 C 中，其中 C 由 $|x_i|\leqslant N$（对于每个 i）给定。而且 X 是 C 的闭子集。如果我们能够证明 C 是紧致的，则根据上述推论，X 也是紧致的。于是从下面的引理可以得到定理的证明。

1.10引理（Heine-Borel定理） R^n 中的方体C是紧致的。

证明 假定$\bigcup U_\alpha = C$，U_α在C中是开集，但没有有限子族使得它们的并为C。将由此得到矛盾。

用平行于C的界面的超平面，将C分成2^n个相等的小方体。这些小方体中的一些C'可以具有下列性质：我们能够找到有限多个α_1，…，α_k使得$C' \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$。然而，并不是所有的$C'$都具有此性质，否则所有这种$U_{\alpha_i}$的有限多个的并集就是$C$了。因而我们可以选择不具有此性质的$C'$，称它为$C_1$。

再将C_1等分成2^n个小方体，并重复上述论证。归纳起来，我们可以得到一系列方体

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_r \supset C_{r+1} \supset \cdots$$

使得对于每个r，C_r的一条棱的长是C的棱长的2^{-r}倍，并且不存在有限多个α_1，…，α_k使得$C_r \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$。下面我们就会看到这些方体相交于一点。因为，如果$\alpha_n$、$\beta_n$分别是方体$C_n$上第一个坐标的最小值和最大值，则序列$\alpha_n$递增且有界，因而趋近一个极限；又因为$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\beta_n - \alpha_n)$，所以序列$\beta_n$趋近于同一个极限，不妨称它为$\xi_1$。类似地，对于其余的坐标，也可找到唯一的值$\xi_i$，使得点$P = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$属于所有的方体$C_r$。

然而点P本身属于某个开集U_α。因为U_α是开集，故能找到$\varepsilon > 0$使得$d(P,Q) < \varepsilon$蕴涵$Q \in U_\alpha$。如果C的直径是δ，C_n的直径就是$2^{-n}\delta$。因而，如果n是如此之大以致$2^{-n}\delta < \varepsilon$，我们看到，对于所有的$Q \in C_n$，

$$d(P,Q) \leqslant 2^{-n}\delta < \varepsilon,$$

所以$Q \in U_\alpha$；从而$C_n \subset U_\alpha$。这与构造C_n时所假定的性质矛盾。这就证明了定理。■

上面的证明提出了紧致空间的特征性质之一：它们在包含它们的任何空间中是闭集。另一个是在映射下它们的状态。

1.11定理 如果X是紧致空间，$f:X\to Y$ 是连续到上映射，则Y是紧致的。

证明 设 U_α是Y的一族开子集，它们的并集为Y。因为f连续，所以$f^{-1}(U_\alpha)$是X的开子集。而且对于任意的$x\in X$，$f(x)\in Y$必包含在某个U_α中，故$x\in f^{-1}(U_\alpha)$，而且这开子集的并集为X。但X是紧致的，所以能够选取

$$X=f^{-1}(U_{\alpha_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

又因为f是到上映射，$Y=U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}$。这表明$Y$是紧致的。

这个结果的下述推论是很有用的。

推论 若X是紧致空间，$f:X\to Y$ 是连续的双射，则f是同胚。

证明 当f是双射时，它有逆f^{-1}。我们证明f^{-1}是连续的，即（根据定理1.1）证明对于X中的开集U，$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$在Y中是开集。用A替换$X-U$，完全等价地，只须证明对于X中的闭集A，$f(A)$在Y中是闭集。但因为X是紧致的以及A在X中是闭集，根据引理1.9的推论，A是紧致的；又据定理1.11，$f(A)$紧致，最后根据引理1.9，$f(A)$在Y中是闭集。■

1.12定理 假定A、B是 R^n中不相交的闭子集，且A紧致，则

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b):a\in A,\ b\in B\}>0.$$

证明 考虑A的开子集族 $\left\{U_A\left(a,\frac{1}{2}d(a,B)\right):a\in A\right\}$，它们

的并集为A。因为A是紧致的，故可以找到有限多个$a_1, \cdots, a_k \in A$，使得它们相应的开集的并为A。今对于每个$a \in A$，可以找到$i(1 \leqslant i \leqslant k)$使得$d(a,a_i) < \frac{1}{2}d(a_i, B)$，因此，根据引理1.4，

$$d(a,B) \geqslant \frac{1}{2}d(a_i B) \geqslant \frac{1}{2}\min_{1 \leqslant i \leqslant k} d(a_i B) = \delta。$$

从而得到$d(A,B) \geqslant \delta > 0$。■

进一步的发展

分析拓扑本身足以成为数学的一个分支，在这个领域中，并不缺乏合适的读物。可推荐的引论性的书有：

Bourbaki, N., 《Topologie Général》, Hermann, Paris（分几部出版）。英译本是《General Topology》, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966。

Hocking, J.G. and G.S. Young, 《Topology》, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961。（与本书的观点相似。）

Hu, S.T., 《Elements of General Topology》, Holden-Day, San Francisco, 1964。（对于代数拓扑学是有用的。）

Kelley, J.L., 《General Topology》, Van Nostrand, Princeton, 1955。

Kelley和Bourbaki的书是美国和法国学派的典型著作。

练习和问题

1. 证明模函数$z \to |z|$给出一个连续映射$C \to R$。
2. 证明：（a）前面哪些例子中描述的函数都是连续的。（b）它们是双射。
3. 证明从R^3中的抛物面$z = x^2 + y^2$到平面$z = 0$的正交投影是同胚。

4. a) 证明有限个点构成的空间是离散的。

b) 证明每个离散空间只有有限多个或可数的无穷多个点。〔提示：如果它是有界的，它就是有限多个的。〕

5. a) 证明$\boldsymbol{R}$上的开区间，$]0, 1[$，$]0, \infty[$ $]-\infty, \infty[$都是同胚的。

b) 证明$]0, 1[$，$[0, 1[$，$[0, 1]$中没有两个是同胚的。〔提示：首先证明对于任意区间J，连续内射$J \to \boldsymbol{R}$是单调的。〕

c) 在乘积

$[0, 1]\times[0, 1[$和$[0, 1[\times[0, 1[$

之间建立一个同胚。

6. 证明对于$n \geqslant 1$，$\boldsymbol{R}^n - \{0\}$同胚于$S^{n-1} \times \boldsymbol{R}$。

7. 设N（"北极"）是S^n上坐标为（0，…，0，1）的点。利用从点N到平面$x_{n+1}=0$的投影，定义映射$f: S^n - \{N\} \to \boldsymbol{R}^n$。试用$P$点的坐标表示$f$（$P$）的坐标，并反过来用$f$（$P$）的坐标表示$P$的坐标。由此推证$f$是同胚。

8. a) 证明$\boldsymbol{R}^n$中的二次曲面

$x_1{}^2 + \cdots + x^2{}_p - x^2{}_{p+1} - \cdots - x^2{}_{p+q} = 1$ $(p+q \leqslant n)$

同胚于$S^{p-1} \times \boldsymbol{R}^{n-p}$。

b) 证明$\boldsymbol{R}^n$中的任意的无心二次曲面同胚于$\boldsymbol{R}^{n-1}$（参阅练习3）。

9. 设$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$连续；记

$A = \{P \in \boldsymbol{R}^2 : f(P) < 0\}$和

$B = \{P \in \boldsymbol{R}^2 : f(P) \leqslant 0\}$。

证明

$\mathrm{Cl}_{R^2} A \subset B$ 和 $A \subset \mathrm{Int}_{R^2} B$。

试举出函数f的例子，使得这些包含关系是严格的，即等号不成立。

10. 找出$\boldsymbol{R}^2$的两个闭子集A, B，使得$A \cap B = \varnothing$，但$d(A, B) = 0$。

11. 证明：如果A和B是紧致的，则存在$x \in A, y \in B$使得$d(x, y) = d(A, B)$当A紧致，B是闭集时这仍成立吗？

12. 如果X和Y非空，证明$X \times Y$紧致当且仅当X和Y二者都紧致。

13. 设$ad - bc > 0$，证明恰有一种方法把矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

表示为乘积

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

其中 $p>0$，$r>0$。并推证空间$\{(a, b, c, d)\in \mathbf{R}^4: ad>bc\}$同胚于 $S^1\times\mathbf{R}^3$。

14．证明如果 $X=X_1\cup\cdots\cup X_n$，且每个 X_i 都是紧致的，则X是紧致的．

15．证明对于任意非空空间 X, Y, Z，映射$X\to Y\times Z$连续当且仅当其分量映射$X\to Y$和$X\to Z$都连续。

第2章　Abel群

导言

虽然本书的目的之一是指出如何把拓扑问题转化成代数问题，但我们并不需要很多的代数知识来解决这些问题。事实上，我们仅用到Abel群，并且其中绝大多部分是自由Abel群。因而这里所用到的代数知识类似于向量空间理论。在这一章中，我们将概述所要用到的性质。

定义

一个Abel群是一个集合A以及映射$A\times A\to A$，通常把此映射表示为

$$(a, b)\longmapsto a+b,$$

使得

G1　存在元素$0\in A$，对于所有$a\in A$，$0+a=a$。

G2　对于每个$a\in A$，存在$(-a)\in A$，$(-a)+a=0$。

G3　对于所有$a, b, c\in A$，有$(a+b)+c=a+(b+c)$。

G4　对于所有$a, b\in A$，有$a+b=b+a$。

公理G1至G3定义了群的概念。对我们来说，最重要的例子是具有通常加法运算的整数群$\mathbf{Z}$。另外的例子是实数加群$\mathbf{R}$和复数加群$\mathbf{C}$。还要特别提到仅有一个元素的平凡群$\{0\}$。通常把$a+(-b)$记作$a-b$，把$a+(b+c)$记作$a+b+c$，等等。

对于同样的概念，另一个标准的记法是乘法。其中基本的运算变成了

$(a,b)\mapsto ab$,

而根据公理所需的等式就是

1）$1a=a$,　　2）$a^{-1}a=1$,

3）$(ab)c=a(bc)$　　4）$ab=ba$。

在这种记法下群的一个例子是非零实数乘法群 R^*（或非零复数乘法群C^*）。注意，这里必须把零排除在外，否则（2）将不成立。对我们更重要的是由其模为1的复数构成的群S^1（其运算仍为复数的普通乘法）。留给读者去检验这些例子确实满足上述的公理（练习1）。

设A是Abel群。A的一个子集B是一子群，如果

S1　$0\in B$。

S2　若$b\in B$，则$(-b)\in B$。

S3　若$a,b\in B$，则$a+b\in B$。

注意S3说明A中的加法限制成为映射$B\times B\to B$；S1和S2蕴涵着这个限制满足G1和G2。因为它也满足G3和G4，所以B是一个群。例如，Z是R的子群，而这二者又都是C的子群；$\{0\}$可看作是每个群的子群。

给定两个群A、X，映射 $\phi:A\to X$是一个同态，如果

H1　对于所有a，$b\in A$，$\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$。

作为一个练习（练习2）留给读者：证明对于所有的$a\in A$，H1蕴涵$\phi(0)=0$和$\phi(-a)=-\phi(a)$。显然，如果$\phi:A\to B$和$\psi:B\to C$都是同态，则$\psi\circ\phi:A\to C$也是同态。把$A\to X$的所有同态的集合记作$\mathrm{Hom}(A,X)$。

双射的同态$\phi:A\to X$称为（A与X之间的）同构。同构在群论中所起的作用与同胚在拓扑学中起的作用一样。如果ϕ是同构，则ϕ^{-1}亦然。A所具有的任何代数性质（元素和子群的个数，子群中元素的分布，等等）X也全具有；A与X并无理论上的区

别。例如，同构于Z的任何群都叫做无限循环群。

如果 $\phi: A\to X$ 是同态，我们定义它的核和象分别为

$$\mathrm{Ker}\phi=\phi^{-1}\{0\}=\{a\in A:\phi(a)=0\},$$

$$\mathrm{Im}\phi=\phi(A)=\{\phi(a):a\in A\}.$$

2.1 引理 如果 $\phi: A\to X$ 是同态，则 $\mathrm{Ker}\phi$ 是 A 的一个子群，$\mathrm{Im}\phi$ 是 X 的一个子群。ϕ 是内射当且仅当 $\mathrm{Ker}\phi=\{0\}$，ϕ 是到上映射当且仅当 $\mathrm{Im}\phi=X$。

我们将只证明第三个结论而把其余的留给读者作练习（练习3）。假定 ϕ 是内射。则如果 $a\in\mathrm{Ker}\phi$，

$$\phi(a)=0=\phi(0),$$

因为 ϕ 是内射，所以 $a=0$，即 $\mathrm{Ker}\phi=\{0\}$。反之，设 $\mathrm{Ker}\phi=\{0\}$，并假定 $\phi(a)=\phi(b)$，则

$$\begin{aligned}\phi(a-b)=\phi(a+(-b))&=\phi(a)+\phi(-b)\\&=\phi(a)-\phi(b)\\&=\phi(a)-\phi(a)=0.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{Ker}\phi=\{0\}$，所以 $a-b=0$，此即 $a=b$。这证明了 ϕ 是内射。

■

如果 $\phi: A\to X$ 和 $\psi: A\to X$ 都是同态，可用明显的方式来定义 $\phi+\psi$：

H2 $(\phi+\psi)(a)=\phi(a)+\psi(a)$，

则 $\phi+\psi$ 是一同态，因为

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(a+b)&=\phi(a+b)+\psi(a+b)\\&=\phi(a)+\phi((b)+\psi(a)+\psi(b)\\&=\phi(a)+\psi(a)+\phi(b)+\psi(b)\\&=(\phi+\psi)(a)+(\phi+\psi)(b),\end{aligned}$$

其中我们依次用到了H2，H1，G4，并再用一次H2。

这样就赋予集合Hom(A,X)一个加法映射。不难验证这个映射满足G1到G4，所以

Hom(A,X) 本身是一个 Abel 群，例如，我们有零同态 $0\in$ Hom(A,X)，使得对于所有$a\in A$，$0(a)=0$。

直和

设A,B 是两个群。下面来定义它们的直和 $A\oplus B$。它由集合$A\times B$和加法构成，加法的定义是

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

我们来验证$A\oplus B$满足公理G1到G4：

G1 $(0,0)+(a,b)=(0+a,0+b)=(a,b)$。

G2 $$(-a,-b)+(a,b)=((-a)+a,(-b)+b)=(0,0).$$

G3 $$\begin{aligned}((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3)&=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\&=((a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+b_3)\\&=(a_1+(a_2+a_3),b_1+(b_2+b_3))\\&=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)\\&=(a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3)).\end{aligned}$$

G4 $$\begin{aligned}(a_1,b_1)+(a_2,b_2)&=(a_1+a_2,b_1+b_2)\\&=(a_2+a_1,b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1).\end{aligned}$$

$A\oplus B$ 称为外直和，然而我们把任何与它同构的群都泛称为A和B的直和（或积）。用归纳——或类推——的方法，可以定义任意有限多个(Abel)群的直和。

下面描述涉及直和的同态。这个结果可与第1章的 C4 相对照。

2.2 引理 设A，B，X是Abel群，又设映射 $\phi: X \to A \oplus B$ 具有分量映射$\phi_1: X \to A$，$\phi_2: X \to B$，即

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) \text{对于所有} x \in X.$$

则ϕ是同态当且仅当ϕ_1和ϕ_2二者都是同态。

因为

$$\phi(x+y) = (\phi_1(x+y), \phi_2(x+y)),$$

而

$$\phi(x) + \phi(y) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) + (\phi_1(y), \phi_2(y))$$
$$= (\phi_1(x) + \phi_1(y), \phi_2(x) + \phi_2(y)).$$

根据定义，ϕ是同态当且仅当对于所有$x, y \in X$，上面两式左边相等；而右边相等等价于ϕ_1和ϕ_2二者都是同态。■

这个引理可解释为定义了一个双射

$$\mathrm{Hom}(X, A \oplus B) \cong \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B)$$

对于具有分量映射ϕ_1和ϕ_2的映射ϕ赋予一个记号是有意义的。我们把它记作一个列矩阵或（为印刷上的方便）用大括号代替小括号的行矩阵，于是

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \{\phi_1, \phi_2\}.$$

这对于由直和出发的同态有一相应的结果。

2.3 引理 设A，B，Y是Abel群。对于任意同态$\psi_1: A \to Y$，$\psi_2: B \to Y$，由

$$(\psi_1, \psi_2)(a, b) = \psi_1(a) + \psi_2(b)$$

定义的映射$(\psi_1, \psi_2): A \oplus B \to Y$是同态。反之，每个同态 $\psi: A \oplus B \to Y$可以（唯一地）表示为(ψ_1, ψ_2)。

注意 引理2.2与C4（对于连续映射）类似：它对于非Abel群如同对Abel群一样是成立的，而且对于集合间的映射也有相应

的结果。但引理2.3却只对Abel群成立。

证明 我们留给读者去验证 (ψ_1,ψ_2) 是同态：注意，必须用到 Y 是Abel群这个事实。现在给定任意同态 ψ，定义 ψ_1 和 ψ_2 分别为

$$\psi_1(a)=\psi(a,0),$$
$$\psi_2(b)=\psi(0,b).$$

不难看出它们是同态，而且有

$$\begin{aligned}\psi(a,b)&=\psi((a,0)+(0,b))\\&=\psi(a,0)+\psi(0,b)\\&=\psi_1(a)+\psi_2(b)\\&=(\psi_1,\psi_2)(a,b).\end{aligned}$$

所以 $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ 也是同态，而且显然这种分解是唯一的。■

上面的记号推广了通常的矩阵的记号。因为注意到两个映射的合成

$$X\xrightarrow{\{\phi_1,\phi_2\}}A\oplus B\xrightarrow{(\psi_1,\psi_2)}Y,$$

由于

$$\begin{aligned}(\psi_1,\psi_2)\{\phi_1,\phi_2\}x&=(\psi_1,\psi_2)(\phi_1(x),\phi_2(x))\\&=\psi_1\phi_1(x)+\psi_2\phi_2(x)\\&=(\psi_1\phi_1+\psi_2\phi_2)(x),\end{aligned}$$

所以上述合成可用

$$(\psi_1,\psi_2)\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}=(\psi_1\phi_1+\psi_2\phi_2)$$

给出。这在一种特殊情况下说明了通常的矩阵乘法法则。现在考察映射

$$\phi:X\oplus Y\to A\oplus B,$$

其形如 $\{\phi_1,\phi_2\}$，其中 $\phi_1:X\oplus Y\to A$ 以及 $\phi_2:X\oplus Y\to B$。我们可以

相继记$\phi_1=(\alpha_{11},\alpha_{12})$以及 $\phi_2=(\alpha_{21},\alpha_{22})$。看上去$\phi$显然应可表示为矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

这是确定无疑的，因为如果

$$\psi_1=\{\alpha_{11},\alpha_{21}\}:X\to A\oplus B$$

和 $$\psi_2=\{\alpha_{12},\ \alpha_{22}\}:Y\to A\oplus B,$$

则$\phi=(\psi_1,\psi_2)$。读者可以验证通常的矩阵乘法法则对这种情况也是成立的。

如果你分不清这些映射都是从哪儿到哪儿，那末这样来记忆将是有用的：矩阵的列对应着定义域的直加项X,Y，而行对应着A和B，因而

$$\begin{matrix} X & Y & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \to A\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \to B.\end{matrix}$$

这记号表示，例如，$\alpha_{12}:Y\to A$。

例子

1 n个实数加法群R的直和是向量空间R^n，因为它们中任何一个的元素都是n个实数的序列$(a_1,\ \cdots,\ a_n)$，而且在每种情况中，两个序列相加，都是把它们的分量相加。

2 一个线性映射$R\to R$就是乘上一个实数a的运算，并且通常就用a表示它。对于线性映射 $R^m\to R^n$，则上述结果导出通常的矩阵记号。

但是，与我们下面的意图关系更密切的是R^n的子群 Z^n；n

个群Z的直和．这里矩阵记号也是适用的，因为特别地，根据命题2.9的推论，有

$$\mathrm{Hom}(Z, Z) \cong Z.$$

下面的结果当我们在后面用群来定义一个数时，是重要的．

2.4 命题 如果$m \neq n$是正整数，则群Z^m与Z^n是不同构的．

证明 首先设A是任意Abel（加法）群．在A的元素间定义关系为：

$$aRb \quad 如果存在c \in A使得a - b = c + c.$$

这是一个等价关系，因为

aRa 因为$a - a = 0 = 0 + 0$；

aRb 蕴涵$a - b = c + c$；而

$$b - a = -(a - b) = (-c) + (-c);$$

因而bRa．

aRa' 和$a'Ra''$蕴涵

$$a - a' = b + b \quad 和 \quad a' - a'' = b' + b'.$$

然而

$$a - a'' = (a - a') + (a' - a'') = (b + b) + (b' + b')$$
$$= (b + b') + (b + b'),$$

因此aRa''．

于是把A划分成一些等价类．用$t(A)$表示这种等价类的个数．如果$A = Z^n$，我们立即看到$(r_1, \cdots, r_n)R(s_1, \cdots, s_n)$当且仅当每个$r_i - s_i$是偶数．因为对于每个$r_i$，存在两种可能性（偶数或奇数），因此得到$t(Z^n) = 2^n$．

现在，如果$\phi: A \to B$是同态以及a，$a' \in A$，定义表明了如果aRa'，则$\phi(a)R\phi(a')$．因而如果ϕ是同构，aRa'当且仅当$\phi(a)R\phi(a')$．在这种情况下，ϕ把A中的每个等价类映射到B中对

应的一个，反之亦然．故$t(A)=t(B)$．

最后，如果$m\neq n$，则$t(Z^m)=2^m\neq 2^n=t(Z^n)$，因而不存在$Z^m$到$Z^n$上的同构．■

正合序列

给定三个群和两个同态组成一个序列

$$A_1\xrightarrow{\phi_1}A_2\xrightarrow{\phi_2}A_3,$$

此序列称为正合的，如果 $\mathrm{Ker}\phi_2=\mathrm{Im}\phi_1$．这可认为包含两个结论：

i）$\mathrm{Im}\phi_1\subset\mathrm{Ker}\phi_2$，

这意味着对于任何形如$\phi_1(x)$的y，都有$\phi_2(y)=0$；或等价地，对于任何$x\in A_1$，$\phi_2\phi_1(x)=0$；或更简略地，$\phi_2\phi_1=0$．

ii）$\mathrm{Ker}\phi_2\subset\mathrm{Im}\phi_1$，

这意味着如果$y\in A_2$满足$\phi_2(y)=0$，则可以找到$x\in A_1$使得$y=\phi_1(x)$．

一组群和同态的序列称为正合的，如果此序列的任意两个相邻的同态都满足上述条件．在这种情况下，上述结论可称为此长序列在A_2处正合．

例子　设B是A的子群．则$\{0\}\to B\subset A$是正合的．更一般地，根据引理2.1，$\{0\}\to A\xrightarrow{\phi}X$是正合的，当且仅当$\phi$是内射，以及$A\xrightarrow{\phi}X\to\{0\}$是正合的当且仅当$\phi$是到上映射．因而仅当$\phi$是双射时，$\{0\}\to A\xrightarrow{\phi}X\to\{0\}$是正合的．对于任意Abel群$A$，$B$，序列

$$\{0\}\longrightarrow A\xrightarrow{\{1,0\}}A\oplus B\xrightarrow{(0,1)}B\longrightarrow\{0\}$$

是正合的。

下面的结果用于相反的方向。

定理 2.5 给定正合序列

$$P\xrightarrow{\alpha}Q\xrightarrow{\beta}R\xrightarrow{\gamma}S\longrightarrow\{0\}$$

和同态$\delta:S\to R$使得$\gamma\delta=1$，则序列

$$P\xrightarrow{\{\alpha,0\}}Q\oplus S\xrightarrow{(\beta,\delta)}R\longrightarrow\{0\}$$

是正合的。

证明 因为我们必须证明序列在$Q\oplus S$和R处正合，所以要验证三件事：

$\mathrm{Im}\{\alpha,0\}\subset\mathrm{Ker}(\beta,\delta)$：事实上，我们有

$$(\beta,\delta)\{\alpha,0\}=\beta\alpha=0。$$

$\mathrm{Ker}(\beta,\delta)\subset\mathrm{Im}\{\alpha,0\}$：设$(\beta,\delta)(q,s)=0$，则

$$0=\gamma(\beta,\delta)(q,s)=(\gamma\beta,\gamma\delta)(q,s)=(0,1)(q,s)=s,$$

以$s=0$代入，同时有

$$0=(\beta,\delta)(q,0)=\beta(q)。$$

根据给定序列在Q处的正合性，存在 p使得$q=\alpha(p)$。但在另一方面，

$$(q,s)=(q,0)=(\alpha(p),0)=\{\alpha,0\}(p)。$$

$\mathrm{Im}(\beta,\delta)=R$：因为$\gamma\delta=1$，所以对于任意$r\in R$，$\gamma(r)=\gamma\delta\gamma(r)$。因而 $r-\delta\gamma(r)\in\mathrm{Ker}\gamma$。而根据给定序列（在$R$处）的正合性，$\mathrm{Ker}\gamma=\mathrm{Im}\beta$。因而对于某个$q\in Q$，

$$r-\delta\gamma(r)=\beta(q)。$$

而这就是

$$r=(\beta,\delta)(q,\gamma(r))。\blacksquare$$

推论 给定正合序列

$$\{0\}\longrightarrow Q\xrightarrow{\beta}R\xrightarrow{\gamma}S\rightarrow\{0\}$$

和$\delta:S\rightarrow R$使得$\gamma\delta=1$，则映射$(\beta,\delta):Q\oplus S\longrightarrow R$是同构。

因为在定理2.5中命$P=0$，我们得到正合序列

$$\{0\}\rightarrow Q\oplus S\xrightarrow{(\beta,\delta)}R\rightarrow\{0\};$$

又据上面例子中的一个注释即可得到结论。$\blacksquare$

当存在如同上面的推论中的同态δ时，正合序列称为可分裂正合序列，我们也称R可分裂成Q和S的直和。

下面的结果虽然没有什么理论价值，然而却是很有用的。

2.6 定理 给定正合序列

$$X\xrightarrow{\{\alpha,\beta\}}A\oplus B\xrightarrow{\begin{pmatrix}ab\\cd\end{pmatrix}}A'\oplus B'\xrightarrow{(\alpha',\beta')}X'$$

其中$d:B\rightarrow B'$是同构，则序列

$$X\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{a-bd^{-1}c}A'\xrightarrow{\alpha'}X'$$

是正合的，而且$\mathrm{Ker}\alpha=\mathrm{Ker}\{\alpha,\beta\}$，$\mathrm{Im}\alpha'=\mathrm{Im}(\alpha',\beta')$。

证明 首先有

$$0=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\alpha+b\beta\\c\alpha+d\beta\end{pmatrix}.$$

又因为d是同构，所以它有逆。故由$0=c\alpha+d\beta$，可导出$0=d^{-1}(c\alpha+d\beta)=d^{-1}c\alpha+\beta$，即

$$\beta=-d^{-1}c\alpha。$$

由此得到：对于 $x\in X$，$\alpha x=0$蕴涵 $\beta x=0$，所以 $\alpha x=0$ 当且仅当αx和βx二者均为0；此即$\mathrm{Ker}\alpha=\mathrm{Ker}\{\alpha,\beta\}$。

同时有$a\alpha+b\beta=0$，替换β，得到

$$0=a\alpha+b(-d^{-1}c\alpha)=(a-bd^{-1}c)\alpha,$$

这证明了在A处正合性需要的一个方面。对于另一方面，假定$u\in A$，使得$(a-bd^{-1}c)(u)=0$。记$v=-d^{-1}c(u)$，则$c(u)+d(v)=0$，以及$a(u)+b(v)=0$。因而(u,v)在给定序列的中间映射的核中；据其正合性，它也在$\{\alpha,\beta\}$的象中。所以存在某个$x\in X$，有$\alpha(x)=u$（同时$\beta(x)=v$），这证明了在A处的正合性。

定理2.6另一半的证明与此极为相似。首先有

$$0=(\alpha',\beta')\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(\alpha'a+\beta'c,\alpha'b+\beta'd),$$

所以$\beta'=-\alpha'bd^{-1}$ 和 $\alpha'(a-bd^{-1}c)=0$。这第二个等式证明了在A'处正合性所需的一个方面；第一个等式蕴涵$\mathrm{Im}\alpha'=\mathrm{Im}(\alpha',\beta')$。因为显然$\mathrm{Im}\alpha'\subset\mathrm{Im}(\alpha',\beta')$；反之，$\mathrm{Im}(\alpha',\beta')$中的任一元素都形如

$$\alpha'(p)+\beta'(q)=\alpha'(p-bd^{-1}(q)),$$

所以它属于$\mathrm{Im}\alpha'$。最后，如果$p\in A'$使得$\alpha'(p)=0$，则

$$(\alpha',\beta')(p,0)=\alpha'(p)=0,$$

因而根据给定序列的正合性，存在$(u,v)\in A\oplus B$使得

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}(u,v)=(p,0),$$

此即

$$a(u)+b(v)=p,$$

$$c(u)+d(v)=0.$$

从而有$v=-d^{-1}c(u)$和 $p=(a-bd^{-1}c)(u)$。■

推论 如果

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: A\oplus B \to A'\oplus B'$$

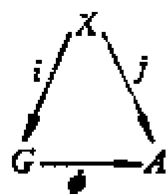
是一个同构，且 $d: B\to B'$ 也是一个同构，则 A 和 A' 同构；特别地，如果 b（或 c）为 0，则 a 是一个同构。

在定理2.6中如果取 $X=X'=\{0\}$，则立刻证明了所述的结论。■

自由Abel群

我们现在已为本章最后的课题——自由Abel群——作好了准备。我们将利用有关键意义的性质，公理化地引出这个概念。

定义 给定集合 X，一个Abel群 G，和一个映射 $i: X\to G$。称 (G, i) 对于 X 具有万有性质，如果对于任意Abel群 A 和映射 $j: X\to A$，存在唯一的同态 $\phi: G\to A$ 使得 $j=\phi\circ i$。



当这个成立时，也称 G 是以 $i(X)$ 为生成元的自由Abel群。X 的基数称为 G 的秩。

在讨论例题之前，先把这个性质应用于前面出现的一个问题。

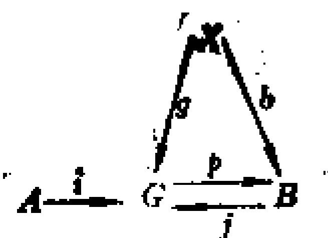
2.7 命题 任意短正合序列

$$0\to A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{p} B\to 0,$$

当 B 是自由Abel群时，是可分裂的。

证明 设 $b: X\to B$ 使得 (B, b) 对于 X 具有万有性质。对于每个 $x\in X$，选取 $g(x)\in G$ 使 $p(g(x))=b(x)$；因为 p 是到上映射，所以那是可能的。根据万有性质，存在同态 $j: B\to G$ 使得 $j\circ b=g$，则

$$p\circ j\circ b = p\circ g = b.$$

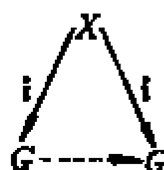


又根据万有性质的唯一性部分，同态$p\circ j$与1_B重合。因而此序列是可分裂的。■

作为如何运用万有性质的另一个例子，我们来证明对于给定的X具有万有性质的(G,i)，本质上是唯一的。然后再考虑存在性。

2.8 命题 假定(G,i)和(H,j)二者对于X都具有万有性质。则存在唯一的同构$\phi:G\to H$使得$j=\phi\circ i$。

证明 根据万有性质，我们得到这样的同态ϕ；类似地又有$\psi:H\to G$使得$i=\psi\circ j$。现在考虑图表



又由万有性质，存在唯一的同态$\chi:G\to G$使得$i=\chi\circ i$。而对于这样的χ我们已经有两个例子了：1_G（显然）和$\psi\circ\phi$，后者是因为$\psi\circ\phi\circ i=\psi\circ j=i$。因而$\psi\circ\phi=1_G$。类似地$\phi\circ\psi=1_H$。所以$\phi$是内射和到上映射，因此是双射。

我们必须考虑自由Abel群的存在性的问题。先从最简单的情况开始。

2.9 命题 设X仅有一个元素x。定义$i:X\to Z$为$i(x)=1$。则(Z,i)对于X具有万有性质。

证明 设A是一(Abel)群，$j:X\to A$，记$j(x)=a$。我们必须证明存在唯一同态$\phi:Z\to A$使得$j=\phi\circ i$，即使得$a=j(x)$等于$\phi(i(x))=\phi(1)$。

现在因为ϕ是同态，

$$\phi(2)=\phi(1+1)=\phi(1)+\phi(1)=a+a,$$

$$\phi(3)=\phi(2+1)=\phi(2)+\phi(1)=(a+a)+a.$$

这启示我们，对于正整数n，用归纳法定义$\phi(n)$为

F1 $\phi(0)=0$,

F2 $\phi(n+1)=\phi(n)+a$,

然后，对于负数集合，

F3 $\phi(-n)=-\phi(n)$.

确实再没有另外的映射ϕ能具有所要求的性质了；然而仍需验证这样定义的ϕ是同态。

根据定义，对于$n\geqslant 0$，F2成立。下面检验它对于所有$n\in\mathbf{Z}$都成立。对于$n\geqslant 0$，有

$$\phi(n+1)=\phi(n)+a,$$

$$\begin{aligned}\phi(-n-1)&=-\phi(n+1)=-(\phi(n)+a)\\&=-\phi(n)-a\\&=\phi(-n)-a,\end{aligned}$$

故 $$\phi(-n)=\phi(-n-1)+a,$$

此即对于$n<0$，F2也成立。可以把这重新写作

$$\phi(n+1)=\phi(n)+\phi(1).$$

下面，用归纳法验证

$$\phi(n+m)=\phi(n)+\phi(m)\qquad \text{对于} m\geqslant 0 \text{成立。}$$

对于$m=0$这是显然的；如果对于$m=k$成立，则

$$\begin{aligned}\phi(n+k+1)&=\phi(n+k)+\phi(1)\\&=\phi(n)+\phi(k)+\phi(1)\\&=\phi(n)+\phi(k+1).\end{aligned}$$

故对于$m=k+1$成立。而且这对于$m=-k$也成立，因为

$$\begin{aligned}\phi(n-k)&=-\phi(-n+k)\\&=-(\phi(-n)+\phi(k))\\&=-\phi(-n)-\phi(k)\end{aligned}$$

$$= \phi(n) + \phi(-k)。$$

这完成了ϕ是同态的证明，因而也就证明了命题2.9。■

今后我们将把上面定义的元素$\phi(n) \in A$记作$n \cdot a$。

推论 对于任意Abel群A，映射

$$ev: \mathrm{Hom}(Z, A) \to A$$

是一同构；其中ev的定义为：对于$f: Z \to A$，$ev(f) = f(1)$。

因为根据同态加法的定义 H2，ev 是群的同态。又据刚刚证明的万有性质，对于任意$a \in A$，存在唯一的同态$f: Z \to A$，使得$f(1) = a$，所以ev也是双射。

2.10命题 假定(G_1, i_1)对于X_1具有万有性质，(G_2, i_2)对于X_2具有万有性质。又设X_1，X_2是分离的。定义

$$i: X_1 \cup X_2 \to G_1 \oplus G_2$$

为
$$i(x) = (i_1(x), 0), \quad x \in X_1,$$

$$i(x) = (0, i_2(x)), \quad x \in X_2.$$

则$(G_1 \oplus G_2, i)$对于$X_1 \cup X_2$具有万有性质。

证明 给定Abel群A和映射$j: X \to A$(这里 $X = X_1 \cup X_2$——译者)，因为(G_1, i_1)对于X_1具有万有性质，故存在唯一同态$\phi_1: G_1 \to A$使得$j|X_1 = \phi_1 \circ i_1$。类似地，有$\phi_2: G_2 \to A$使得$j|X_2 = \phi_2 \circ i_2$。则，如果

$$\phi = (\phi_1, \phi_2): G_1 \oplus G_2 \to A,$$

就有 $$\phi i(x) = \phi(i_1(x), 0) = \phi_1 i_1(x) = j(x), \quad x \in X_1;$$

对于$x \in X_2$有类似结果，故有$\phi \circ i = j$。反之，如果$\psi = (\psi_1, \psi_2)$亦满足$\psi \circ i = j$，用同样的论证法可导出$\psi_1 \circ i_1 = j|X_1$，所以根据i_1的万有性质，$\psi_1 = \phi_1$。类似地$\psi_2 = \phi_2$。

对于有限多个群的直和，用归纳法，同样的论证也都奏效。

运用命题2.9，如果X是有限的，则存在(G,i)对于X具有万有性质，又命题2.8表明这是唯一的。现在用构造法来描述所给定的群G。设X有n个元素x_1，x_2，…，x_n。我们必须组成n个群的直和，其中每一个都是整数群Z。这个直和的每个元素是n个整数的序列$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，可以把它考虑作从X到Z的一个映射（x_i对应于r_i）——或者也可想象成R^n中具有整数坐标的点。群的结构则可考虑成R^n中向量的加法：

$$(r_1, \cdots, r_n)+(s_1, \cdots, s_n)= (r_1+s_1, \cdots, r_n+s_n).$$

我们把这个群记作Z^n。则(Z^n,i)对于X具有万有性质，其中$i: X\to Z^n$使得$i(x_k)$是第k个坐标轴上的单位点，或者换一种方式，用Kronecker的δ-记号，

$$i(x_k)=(\delta_{k1},\delta_{k2},\cdots,\delta_{kn}).$$

这样，Z^n是秩为（有限）n的自由Abel群。根据命题2.4，一旦知道了抽象群的结构，它的秩也就决定了。现在我们希望构造任意（无限）秩的自由Abel群。把上面对Z^n的描述作为一个模型。

设X是任意集合。记$F(X)$是这种映射$\xi:X\to Z$的集合，除X的有限多个元素x外，$\xi(X)=0$。给定ξ，$\eta\in F(X)$，定义$-\xi$，$(\xi+\eta)$为

$$\left.\begin{aligned}(-\xi)(x)&=-\xi(x)\\(\xi+\eta)(x)&=\xi(x)+\eta(x)\end{aligned}\right\}\text{对于所有}x\in X.$$

不难证明，具有这些运算的$F(X)$是Abel群。定义$i_X:X\to F(X)$为

$$i_X(x)(y)=\begin{cases}0, & y\neq x,\\1, & y=x.\end{cases}$$

定理2.11 $(F(X),i_X)$对于X具有万有性质。

证明 首先我们说如果$Y\subset X$，可以把$F(Y)$与$F(X)$的一个

子群等同起来，这个子群是由使得$\xi(X-Y)=0$的映射$\xi:X\to Z$所组成的。现在如果$\xi\in F(X)$ 则存在X的某个有限子集Y使得$\xi(X-Y)=0$，故$\xi\in F(Y)$。所以

$$F(X)=\bigcup\{F(Y):Y\subset X,\ Y\text{有限}\}.$$

其次，注意到由命题2.10所得到的一个结论，用现在的记号来说，它就是说如果Y是有限的，则$(F(Y),i_Y)$对于Y具有万有性质。

设A是任意Abel群，$j:X\to A$是映射。对于X的任意有限子集Y，我们知道存在唯一的同态$\phi_Y:F(Y)\to A$使得$\phi_Y\circ i_Y=j|Y$。而且，如果$Z\subset Y$，因而$F(Z)\subset F(Y)$，则$i_Z=i_Y|Z$，因而$(\phi_Y|F(Z))\circ i_Z=j|Z$。据唯一性，$\phi_Z=\phi_Y|F(Z)$。现在定义$\phi:F(X)\to A$。对于任意$\xi\in F(X)$，选取$X$的一个有限子集$Y$使得$\xi\in F(Y)$，并定义$\phi(\xi)=\phi_Y(\xi)$。这与$Y$无关，因为如果同时$\xi\in F(Y')$，据上述，有

$$\phi_Y(\xi)=\phi_{Y\cup Y'}(\xi)=\phi_{Y'}(\xi).$$

ϕ也是同态。因为如果给定$\xi_1,\ \xi_2\in F(X)$，选取X的有限子集Y_1，Y_2使得$\xi_1\subset F(Y_1)$，$\xi_2\in F(Y_2)$，并记$Y=Y_1\cup Y_2$。则由于ϕ_Y是同态，有

$$\phi(\xi_1+\xi_2)=\phi_Y(\xi_1+\xi_2)=\phi_Y(\xi_1)+\phi_Y(\xi_2)$$
$$=\phi(\xi_1)+\phi(\xi_2).$$

对于任意$x\in X$，有

$$\phi(i(x))=\phi_{\{x\}}(i_{\{x\}}(x))=j(x);$$

因而$\phi\circ i=j$。

最后，给定任意同态$\psi:F(x)\to A$使得$\psi\circ i=j$，对于任意有限集$Y\subset X$，有

$$\psi|F(Y)\circ i_Y=\psi\circ(i|Y)=j|Y$$
$$=\phi_Y\circ i_Y=\phi|F(Y)\circ i_Y,$$

因此根据已经证明的对于Y的唯一性，得到$\psi|F(Y)=\phi|F(Y)$。又因为$F(X)$是这些子群$F(Y)$的并，故而得到$\psi=\phi$。∎

对于每个集合X，我们已经构造了对于X具有万有性质的$(F(X), i_X)$。通常就把i_X记作i，把$F(X)$称为X上的自由Abel群。现在给定集合间的任意映射$f:X\to Y$，则存在（根据万有性质）唯一的同态$F(f):F(X)\to F(Y)$使得$F(f)\circ i_X=i_Y\circ f$，或用图表的形式，是

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle i_X} & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

进一步的发展

如同第一章一样，我们仅仅是拉开了纯数学的内容广泛而又绚丽多姿的分支的帷幕。对于一个拓扑学家来说，要从众多群论方面的引论书籍的推荐中去进行选择，是会厌倦的。在这里（以及本书后面），我宁愿说，我们的观点是从甚至更抽象的数学分支，范畴论导出的。这方面，Freyd 和 Mitchell 的激励人们的书提供了（并不初等的）导引。

reyd. P.,《Abelian Categories》,
Harper and Row, New York, 1964.
Mitchell, B.《Theory of Categories》,
Academic Press, New York, 1965.

练习和问题

1. 证明$\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$是加法群，而$\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$, 和S^1是乘法群。
2. 证明如果ϕ是加法群间的同态，则$\phi(0)=0$, $\phi(-a)=-\phi(a)$。

3. a) 证明引理2.1。

b) 证明引理2.1后面的例题中的论断。

4. A, B是G的子群。证明$A\cap B$是一个子群。并举例说明$A\cup B$不是G的子群。事实上，可以证明包含A和B的最小子群是

$$A+B=\{a+b: a\in A,\ b\in B\}.$$

5. 假定给定正合序列，

$$0\to A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{p} B\to 0.$$

a) 给定分裂同态$j: B\to G$使得$p\circ j=1_B$，证明存在唯一的同态$q: G\to A$使得$q\circ i=1_A$和$q\circ j=0$。

b) 给定同态$q: G\to A$使得$q\circ i=1_A$，证明存在唯一的$j: B\to G$使得$p\circ j=1_B$和$q\circ j=0$。

c) 证明当(a)和(b)成立时，$j\circ p+i\circ q=1_G$。

6. 设$i: A\to G$和$q: G\to A$满足$q\circ i=1_A$。证明G是$i(A)$和$\mathrm{Ker}q$的直和。

7. 给定群和同态

$$i: A\to G,\qquad j: B\to G,$$

$$q: G\to A,\qquad p: G\to B$$

满足$p\circ i=0$，$q\circ j=0$，$p\circ j=1_B$，$q\circ i=1_A$和$j\circ p+i\circ q=1_G$。证明序列

$$0\to A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{p} B\to 0$$

$$0\to B\xrightarrow{j} G\xrightarrow{q} A\to 0$$

是正合的。

8. 仍沿用上一题的记号，证明（通过构造逆映射或另外的方式）对于任意群X，

$$f\longmapsto(q\circ f,\ p\circ f)$$

诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}(X,G)\to\mathrm{Hom}(X,A)\times\mathrm{Hom}(X,B)$$

以及$f\mapsto(i\circ f,\ j\circ f)$诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}(G,X)\to\mathrm{Hom}(A,X)\times\mathrm{Hom}(B,X).$$

并证明这些双射是群同构。

9. a) 给定同态$j:G_1\to H$和到上同态$\alpha:G_1\to G_2$，证明存在同态$\beta:G_2\to H$使得$\beta\circ\alpha=\gamma$当且仅当$\alpha(\mathrm{Ker}\gamma)=0$。

   b) 举例说明如果α不是到上同态，条件 $\alpha(\mathrm{Ker}\gamma)=0$ 并不蕴涵β的存在性。

*10. 举一个是正合的但不可分裂的序列的例子。

*11. 给定集合X，$x\in X$和$\varepsilon:X\to \mathbf{Z}$使得$\varepsilon(x)=1$。设$p:F(X)\to\mathbf{Z}$满足 $p\circ i_X=\varepsilon$。证明p是可分裂的到上映射。同时证明如果ε_1，p_1和ε_2，p_2如上所述，则存在唯一同构$\phi:\mathrm{Ker}p_1\to\mathrm{Ker}p_2$ 使得对于所有 $\xi\in\mathrm{Ker}(p_1)$，$\phi(\xi)-\xi$是$i_X(x)$的倍数。

12. 通过用系数矩阵来表示同态 $\phi:\mathbf{Z}^m\to\mathbf{Z}^n$，从而给出定理2.6的另一个证明，并证明如果$\phi$是一同构，则此矩阵是可逆的。

13. 设(G,i)对于X具有万有性质。证明对于任意群A，在$\mathrm{Map}(X, A)$和$\mathrm{Hom}(G, A)$之间存在双射。

14. 设 (G, i) 对于X除了唯一性外满足万有性质。构造一个同态 $F(X)\to G$，并证明G可分裂为直和$F(X)\oplus A$。同时证明其逆也成立。〔提示：利用练习 5 。〕

15. 证明

$$\mathrm{Ker}\{\alpha,\ \beta\}=\mathrm{Ker}\alpha\cap\mathrm{Ker}\beta,$$

$$\mathrm{Im}(\alpha,\ \beta)=\mathrm{Im}\alpha+\mathrm{Im}\beta.$$

16. 假定对于每个i，C_i是秩为a_i的自由Abel群。

   a) 如果$0\to C_0\to C_1\to C_2\to 0$是正合的，证明 $a_0+a_2=a_1$。〔提示：利用定理2.5.〕

   b) 给定

$$0\to C_n\to C_{n-1}\to\cdots\to C_1\to C_0\to 0$$

   是正合的，证明

$$\sum_0^n(-1)^i a_i=0.$$

第Ⅰ部分

同伦论引论

第3章　连通的和不连通的空间

导言

我们这本拓扑学导引从研究连通性开始，传统上，这是分析拓扑学和代数拓扑学所共同研究的唯一论题。这儿的探讨是描述性的，后面将是更正式的，也就是推广这个概念。注意Jordan曲线定理是对平面上Jordan曲线的余集关于连通性质的陈述。

连通性

设X是空间。假定X可表示为不相交的非空子集U和V的并：

$$U \cup V = X, \quad U \cup V = \varnothing.$$

另外，又假定U与V二者都是X的开子集。则(U, V)称为X的一个分划，而X称为不连通的。如果X没有这样的分划，它就是连通的。

这个定义有几个等价的形式。首先，注意U是V在X中的余集，故U是开集的条件等价于V是闭集的条件，反之亦然。其次，注意不连通空间的最简单例子是只有两个点的空间。

3.1 引理 R的子集$\{0,1\}$是不连通的。

证明 取$U=\{0\}$，$V=\{1\}$。显然它们是不相交的和非空的，而且它们的并就是所给的空间。同时它们每个都是开集：U是所给空间与开区间$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$的交，对于$V$类似。■

$\{0, 1\}$不仅是不连通的，而且还是所有不连通空间的象征。因为设(U, V)是X的一个分划，在X上定义其值为0和1的函数：

$$f(U)=0,$$
$$f(V)=1.$$

则f是连续的：事实上，对于$\{0,1\}$的任何子集S，$f^{-1}(S)$是开集。因为它仅有四个子集S：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，和$\{0, 1\}$本身。它们的逆象分别是$\varnothing$，U，V，和X；由假设它们都是开集。反之，设$f: X \to \{0, 1\}$是连续映射，它取0和1两个值。记$U=f^{-1}\{0\}$，$V=f^{-1}\{1\}$。则因为f连续和$\{0\}$与$\{1\}$在$\{0, 1\}$中是开集（见引理3.1的证明），U和V在X中都是开集。由假设其中每一个都是非空的，所以，显然

$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \varnothing.$$

这完成了下面引理的证明。

3.2 引理 空间X不连通当且仅当存在X到空间$\{0, 1\}$的连续到上映射。■

要证明某些空间不连通是十分容易的。

例 由方程$x^2-y^2=1$所确定的双曲线H是不连通的。

证明 双曲线包含点$(1, 0)$和$(-1, 0)$。但是，如果以

$x=0$代入，得到$y^2=-1$，这没有（实）解。取

$$U=\{(x,\ y)\in H: x>0\},$$

$$V=\{(x,\ y)\in H: x<0\}.$$

证明中的第一款表明每个集合是非空的，第二款是$U\cup V=X$；而且显然$U\cap V=\varnothing$。也因为U和V是定义为X与平面上开集（分别用$x>0$和$x<0$定义）的交，故U和V在X中是开集。因而X有一个分划$X=(U,\ V)$，即X是不连通的。

但是要直接证明一个空间是连通的，则并不那么容易；我们需要一个更迂回的论证来代替它。最重要的例子是区间。

3.3 定理 实数区间[0，1]是连通的。

证明 假设不连通，来导致矛盾。由于不连通，则存在[0,1]上的连续函数，比如说f，它仅取两个值0和1。假定$f(1)=1$（若不然，可用$g(x)=1-f(x)$代替$f(x)$）。由假设，f亦取0值。设ξ是使$f(x)=0$的点x的最小上界。考察$f(\xi)$就可得到矛盾。

因为f在ξ处连续，故存在$\delta>0$使得如果$0\leqslant x\leqslant 1$，$|x-\xi|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(\xi)|<1.$$

由于f仅取值0和1，所以这个不等式蕴涵$f(x)=f(\xi)$。现在对于$\xi<x\leqslant 1$，$f(x)=1$，故$f(\xi)=1$（如果$\xi=1$，由假设此式成立）。另一方面，ξ是使$f(x)=0$的x的最小上界，所以在区间$(\xi-\delta,\ \xi)$中可以找到某个这样的x，因而$f(\xi)=0$（如果$\xi=0$，因为对于$0<x\leqslant 1$，$f(X)=1$且由假设f取两个值，所以这个等式成立）。这样就得到了矛盾；定理得证。■

道路连通性

通过对区间的观察，引导出一个与连通性颇不相同的概念。空间X称为**道路连通的**，如果对于任意两点$x,y\in X$，可以找到连续映射$f:I\to X$使$f(0)=x$，$f(1)=y$。一般地，连续映射$f:I\to X$称为X中的一条道路，并说它是连结x与y的道路。

例 椭圆是道路连通的。下述集合

$D^n=\{x\in R^n:|x|\leqslant 1\}$,

$S^{n-1}=\{x\in R^n:|x|=1\}\quad (n\geqslant 2)$

也是道路连通的。因为可以选取适当的坐标系使得椭圆E的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

定义映射$f:R\to E$为

$f(\theta)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$。

这映射是连续的（正弦函数和余弦函数连续），而且如所周知，映射是到上的。故E上的两个点可表示为$f(\theta_0)$，$f(\theta_1)$。则所求的道路是

$g(t)=f((1-t)\theta_0+t\theta_1)$。

这个证明的最后部分不过是证明[0，1]可用R中的任何闭区间等价地替代。

其次，我们只要看到D^n是凸集，所以它的任意两点都可以用直线段连结。

给定S^{n-1}上的两个点，过它们作一平面（为了明确起见，使它也通过原点）。此平面与S^{n-1}相交于一个包含这两给定点的圆。现在沿着这个圆就构成了如上所说的道路。

通过与连通性的类比，我们引出了道路连通性。现在来研究这两种性质之间的关系。

3.4 定理 每个道路连通空间一定是连通的。然而每个连通空间却不一定都是道路连通的。

证明 首先假定X道路连通，但是不连通的。设$f:X\to\{0,1\}$是到上连续映射。选取点x，$y\in X$使得$f(x)=0$，$f(y)=1$。又选取一条道路$g:I\to X$使得$g(0)=x$，$g(1)=y$。则$f\circ g:I\to\{0,1\}$是连续映射使得$f\circ g(0)=0$，$f\circ g(1)=1$。而这与定理3.3矛盾。这证明了定理的第一个论断。

对于第二个论断，我们必须构造一个是连通但非道路连通的空间。我们所用的空间，作些微小的修改之后，就是种种反例的丰富来源。

设$Y=U\cup V$，其中

$$U=\{(x,\ y)\in R^2:x=0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$V=\{(x,\ y)\in R^2:0<x\leqslant 1,y=\sin(1/x)\}.$$

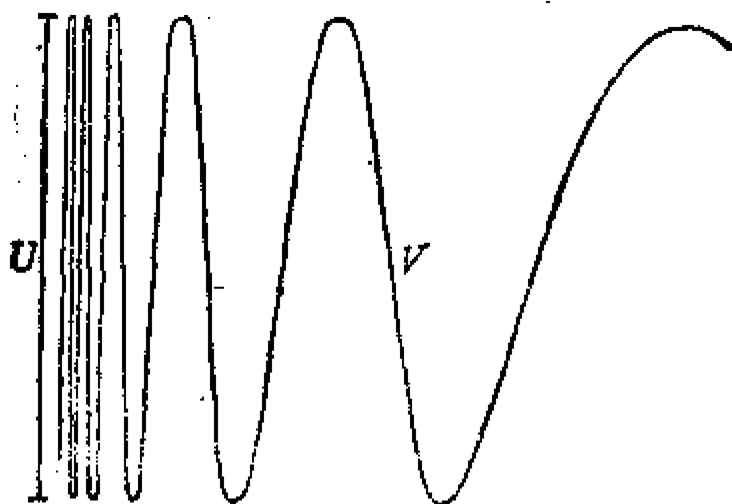


图 3.1

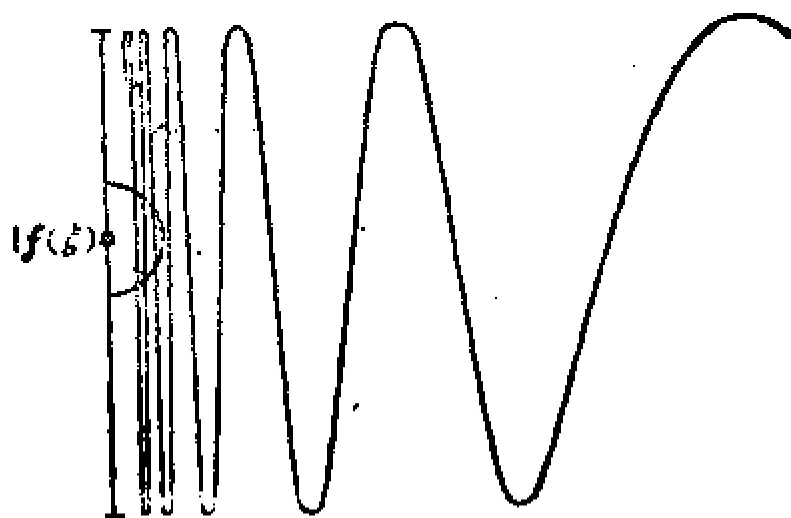
则U是一闭区间，因而是道路连通的。V具有参数表示$(x,\sin 1/x)$，而$\sin(1/x)$在$0<x\leqslant 1$上是连续函数，故V也是道路连通的。所以如果Y不连通，$(U,\ V)$就是它唯一想得到的分划（任

何另外的分划就会把连通空间U或V分割开了）．定义$f:Y\to\{0,1\}$为$f(U)=0$，$f(V)=1$。我们断言f在U的任意点处都不连续；这里只在原点处进行验证。事实上，$f(0,0)=0$，但是对于所有的正整数k，$f((k\pi)^{-1},0)=1$。$(0,0)$的任意邻域内均包含某个点$((k\pi)^{-1},0)$。所以f不连续而Y是连通的。

另一方面，在Y内却没有道路来连结U与V的点。事实上，若假定（连续的）$f:I\to Y$使得$f(0)\in U$和$f(1)\in V$。设ξ是使得$f(x)\in U$的那些$x\in I$的最小上界。因为f连续和U（在R^2中，因而在Y中）是闭集，故$f(\xi)\in U$，而且由f的连续性，对于适当的$\delta>0$，$f[\xi,\xi+\delta]$中的点与$f(\xi)$间的距离不超过一个单位（图3.1）．考虑V与圆盘

$$\{(x,y)\in R^2: d(f(\xi),(x,y))\leqslant\frac{1}{2}\}$$

的交集J。当$x\to 0$时，$\sin(1/x)$在±1之间振荡，在J中，V被“切



碎”成为无穷多段闭的、在圆盘中的差不多是竖直的线段。如果K是包含$f(\xi+\delta)$的线段，则$(K,J-K)$是J的一个分划，如此，没有从一个区间到J的连续映射能从其中之一跳到另一个。但因为$f(\xi+\delta)\in K$，$f(\xi)\in J-K$，所以得到了矛盾。∎

也许会抗议说，这个反例Y是过分复杂或“别扭的”空间，而“对于任何合理的空间，连通性应该蕴涵道路连通性”。事实上下面的内容倒是正确地表达了这种想法的合式的方式。

局部道路连通性

定义 拓扑空间X在a点处是局部道路连通（$l.p.c.$）的，如果a的每个邻域U包含一个邻域V，使得对于V中的任意两点，都可用U中的道路连结它们。

如果W是这些能用U中的道路与a点连结的点的集合，则显然$V\subset W\subset U$，而且W是道路连通的。因而可以等价地要求a的每个邻域都包含一个道路连通邻域。

我们称X是“$l.\ p.\ c.$”的，如果在其每一点都是“$l.\ p.\ c.$”的。运用下面的引理，可以构造道路连通空间。

3.5 引理

i) $\mathbf{R}^n$是局部道路连通的。

ii) 如果X是$l.\ p.\ c.$的，U在X中是开集，则U是$l.\ p.\ c.$的。

iii) 如果一族集合U_α都是$l.\ p.\ c.$的，并且U_α在X中都是开集，$X=\bigcup_\alpha U_\alpha$，则$X$是$l.\ p.\ c.$的。

证明

i) $\mathbf{R}^n$中的每个点都有任意小的凸邻域（例如，圆盘），而后者是道路连通的。

ii) 如果$a\in U$，V是a在U中的一个邻域，则（因为U在X中是开集）V也是a在X中的一个邻域。因而它包含一个道路连通邻域。

iii) 如果$x\in X$，则对于某个α，$x\in U_\alpha$，且x在X中的任意邻域

N包含$N\cap U_\alpha$，而后者包含x的在U_α中的一个道路连通邻域M。因为U_α是开集，故M也是x在X中的一个邻域。∎

引理3.5的第（ii）和（iii）部分使一种模糊思想明确化，这种模糊思想认为局部道路连通性仅与X一点邻近的性态有关，即它是局部性质。非$l.p.c.$集合的例题是：

例

1．点集

$$P=\{0, \frac{1}{n}: n\text{是正整数}\}\subset R$$

在0点处是非$l.p.c.$的。

2．R^2中连结$P\times 0$和点（0，1）的线段之并集在任意点$(0, y)$ $(0\leqslant y<1)$处是非$l.p.c.$的。见图3.2。

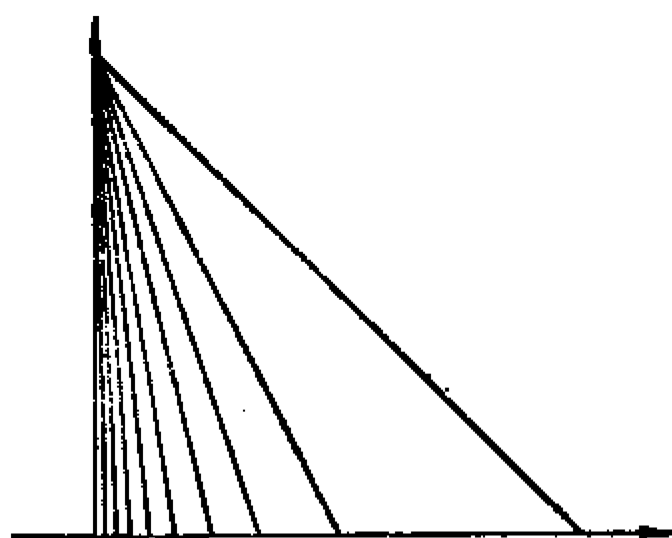


图 3.2

3．定理3.4中的集合Y在U的任意点处是非$l.p.c.$的。

这里仅证明例1．0点的任意邻域都包含无穷多个点$\frac{1}{n}$，然而，很显然P中的任何道路都必须取常数值。

3.6 定理　如果X是$l.p.c.$和连通的，则它是道路连通

的。

证明 假定X是l. p. c.但非道路连通的。我们来构造一个分划。设x，$y\in X$是不能用道路连结的两个点。又设U是所有这种点的集合，即可以用X中的道路把这些点与x连结起来。记$V=X-U$。为了证明(U, V)是一个分划，只须证明U和V都是开集。

设$u\in U$。则在X中u有一个道路连通邻域W。如果$w\in W$，则在W中有道路连结w与u，而且在X中有另外的道路连结u与x。故w可以与x连结；$w\in U$，因而$W\subset U$。因为U包含自身每个点的一个邻域，所以它是开集。类似地，设$v\in V$有一道路连通邻域N。如果$n\in N\cap U$，就有一条经过n的道路连结v和x，这与假设矛盾。因而$N\subset V$，V是开集，正如所欲求的。■

进一步的发展

连通性和道路连通性的概念所涉及的，实质上只是点，所以是"零维性质"。但通过用至多n维的多面体代替点，可以把它们推广到"n-（道路）连通"。$n=1$的情况将在下面研究，对于比较大的n的情况，可以在任何一本代数拓扑学的书中查阅到，例如Hocking和Young，Maunder或Spanier的书。

还可以定义局部n-（道路）连通性，使得与引理3.5和定理3.6类似的结论成立。对于这方面的某些内容，见Hocking和Young的书；而更详细的探讨则可看Wilder的著作。

Hocking, J. G. and G. S. Young,《Topology》, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

Maunder, C. R. F.,《Algebraic Topology》, Van Nostrand, Princeton, 1970.

Sparier, E. H., 《Algebraic Topology》, McGraw-Hill, New York, 1966.

Wilder, R. L., 《Topology of Manifolds》, Amer. Math. Soc. colloq. Publ. 32(1949).

练习和问题

1. 确定下列空间哪些是连通的，哪些是道路连通的：

a) 用下列各式分别定义的C的子集：

i) $|Z|<1$,　　ii) $|Z|=1$,

iii) $|Z|>1$,　　iv) $|Z|\geqslant 1$,

v) $|Z|\neq 1$,　　vi) $|Z|\leqslant 1$,

b) 用下列各式分别定义的R^3的子集：

i) $x^2_1+x^2_2+x^2_3=1$,　　ii) $x^2_1+x^2_1-x^2_3=1$,

iii) $x^2_1-x^2_2-x^2_3=1$,　　iv) $-x^2_1-x^2_2-x^2_3=1$.

c) 实2×2矩阵的集合，其中的矩阵是

i) 任意的，　　ii) 非退化的，

iii) 退化的，　　iv) 对称的，

v) 正交的。

d) 在正方形 $\{(x_1,x_2)\in R^2:0\leqslant x_1\leqslant 1, 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$ 中去掉下列垂直线段：

$$\left.\begin{array}{ll} x=2^{-2k}, & 0\leqslant y\leqslant 2/3 \\ x=2^{-2k-1}, & \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1 \end{array}\right\} \text{对于所有整数} k\geqslant 1.$$

e) 除了开头的限制改为$0<x_1<1$, $0<x_2<1$ 以外，其它与(*d*)相同。

2. 证明：如果$f: X\to Y$是连续到上映射，那么

如果X连通，则Y连通。以及

如果X道路连通，则Y道路连通。

对于局部道路连通性，你认为相应的结果成立吗？写出概要的证明或举出反例。

3. 利用引理3.5（iii）证明S^1是 $l.p.c.$的。

4. 证明关于例题所断言的事实。

5. 证明下面的结果：如果A和B是$\boldsymbol{R}$ 的连通子集以及$A\cap B$是非空的，则$A\cup B$是连通的．如果全部用"道路连通"代替"连通"，这个结果还成立吗？

6. 证明：如果A是$\boldsymbol{R}^m$的非空连通子集，B是$\boldsymbol{R}^n$的非空连通子集，则$A\times B$是$\boldsymbol{R}^{m+n}$的非空连通子集，并证明其逆。

7. 证明$\boldsymbol{R}$的子集是连通的当且仅当它是一个区间（闭的，半开或开的）.

8. 试举出Euclid空间中的某个道路连通子集X，使得在其上不存在连续的到上映射 $I\to X$。

9. X是$\boldsymbol{R}^n$的连通子集，且$X\subseteq Y\subseteq Cl(X)$。证明$Y$是连通的．由此导出定理3.4的空间是连通的。

10. 证明如果X与Y同胚且$x\in X$，则对于某个$y\in Y$，$X-\{x\}$与$Y-\{y\}$同胚．由此导出$\boldsymbol{R}^1$ S^1和$\boldsymbol{R}^2$中任何两个都不同胚。

11. 证明如果U是$\boldsymbol{R}^n$的连通开子集，则U中的任意两个不同的点，都可以用U中的一条道路连结，这条道路由有限多条直线段组成。〔提示：利用证明定理3.6的方法。〕由此导出这条道路可以取作一个嵌入：$I\to U$。同时证明这两个点可以用道路 $f:I\to U$ 连结，其中f具有连续的一阶偏导数．〔提示：利用刚刚构造的道路，把它的尖角"变圆"．〕

12. 设$X=X_1\cup X_2$，其中X_1和X_2都是X的 $l.p.c.$闭子集，证明X也是$l.p.c.$的．如果X_1是闭集而X_2是开集，结果如何？

第 4 章　连通性的深入

导言

代数拓扑学传统的方法，是从一种相对地说来比较直接的几何观念开始，然后用代数方法在其上构造一些结构。这一章中将在连通和道路连通观念的基础上，发挥代数学。

群$H^0(X)$

定义　$H^0(X)$是连续映射$X\to Z$的集合。

记号中写 0 的理由是因为H^0是一系列基于不同维数的类似构造的第一个。H^0是0-维的情况。下一章我们将定义H^1。

4.1 引理　如果$f,g:X\to Z$ 是连续映射，定义$-f:X\longrightarrow Z$和$(f+g):X\longrightarrow Z$为

$$(-f)(x)=-f(x),$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (x\in X).$$

则$-f$和$f+g$是连续的，且$H^0(X)$对于这些运算是一个群。

$f+g$的连续性的证明见第一章“连续”。其它论断的证明留作练习。■

当然，在Z的每个子集都是开集的意义下，Z是离散的。这里，它类似于我们在第三章用过的集合$\{0,1\}$。注意到X连通当且仅当每个映射$X\longrightarrow Z$是常值映射。因为，如果X不连通，就存在X到$\{0,1\}\subset Z$的非常值映射，相反，如果存在非常值映射$X\xrightarrow{f}Z$使得$n\in f(X)$，定义$r:Z\to\{0,1\}$为

$$r(n)=0,$$

$$r(Z-\{n\})=1;$$

则 r 连续且 $r\circ f$ 把 X 映射到$\{0, 1\}$上。

因而，对于每个空间 X，连通的观念给我们定义一个Abel群。下面将进一步来构筑它。

定义 设$f:X\longrightarrow Y$是连续映射。定义

$$f^*:H^0(Y)\to H^0(X)$$

为

$$f^*(g)=g\circ f.$$

4.2 引理 f^*是同态。如果1是X的恒同映射，则 1^* 是 $H^0(X)$的恒同同态。如果$f: X\to Y$和$g: Y\to Z$，则$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$。

证明

$$\begin{aligned}f^*(g_1+g_2)(x)&=(g_1+g_2)(f(x))\\&=g_1(f(x))+g_2(f(x))\\&=f^*g_1(x)+f^*g_2(x)\\&=(f^*g_1+f^*g_2)(x).\end{aligned}$$

故f^*是同态。第二个论断是显然的；由计算

$$\begin{aligned}(g\circ f)^*(h)=h\circ(g\circ f)&=(h\circ g)\circ f\\&=f^*(h\circ g)=(f^*\circ g^*)(h),\end{aligned}$$

第三个论断也是显然的。■

这些性质似乎是平凡的；在此情况下，它们确实是如此。然而，把这些性质列举出来是值得的。后面我们将需要它们以及它们在其它情况下的类比结果，而那里的证明是不平凡的，所以读者应在这儿很好地使自己熟悉它们。

集合$\pi_0(X)$

现在再一次探讨道路连通性。我们在X的点之间定义一个二元关系～：如果在X中有一条道路连结x与y，记作$x\sim y$，下面的性质在前一章（在何处？）曾经隐约地用到过，现在给出正式的证明

4.3 引理 在X上，～是一种等价关系。

证明 定义$f_x:I\longrightarrow X$为$f_x(t)=x$，对于所有$t\in I$.显然f_x连续。因为$f_x(0)=f_x(1)=x$，这证明了反身性$x\sim x$。

又定义$R:I\to I$为$R(t)=1-t$。则R连续。如果$f:I\to X$是连结x到y的一条道路，$f(0)=x$，$f(1)=y$，则$f\circ R:I\to X$是连结y到x的一条道路，而且根据第一章的C2，$f\circ R$是连续的。因而～是对称的。

最后，设$f:I\to X$是连结x到y的一条道路和$g:I\to X$是连结y到z的道路，使得

$f(0)=x,\quad f(1)=g(0)=y,\quad$ 和 $\quad g(1)=z$.

定义函数$h:I\to X$为

$$h(t)=\begin{cases}f(2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

因为$f(1)=g(0)=y$，这两个定义在$t=\frac{1}{2}$处是一致的；显然$h(0)=x$，$h(1)=z$.因而，如果h连续，它是连结x与z的道路，故$x\sim z$，这就证明了～的传递性。

而f和g是连续的，故显然h在每个闭区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是连续的。根据定理1.7，$h$是连续的。■

我们把X的点在关系～下所分成的等价类的集合，记作$\pi_0(X)$。这些等价类本身叫做X的道路连通分支。显然，X是道

路连通的当且仅当$\pi_0(X)$仅包含一个元素。我们将需要典范函数$X\xrightarrow{p}\pi_0(X)$，它把每点映成它的等价类，而且，类似于引理4.2，还有一些导出映射。于是，若设$f:X\to Y$是拓扑空间之间的连续映射。又如果作为X的点$x\sim x'$，就有道路$p:I\to X$连结它们。则$f\circ p:I\to Y$是连结$f(x)$与$f(x')$的道路，所以在Y中$f(x)\sim f(x')$。因此f把等价类映射到等价类，从而诱导出一个映射

$$f_*:\pi_0(X)\longrightarrow\pi_0(Y)。$$

我们可以用下列（可交换的）图表中的要求$f_*\circ p=p\circ f$来刻画这个映射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \pi_0(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_0(Y) \end{array}$$

4.4 引理 如果f是X的恒同映射，则f_*是$\pi_0(X)$的恒同映射。如果$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$，则$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$。

这个引理的证明留给读者作为练习。■

在把第三章的结果代数化的计划中，我们下而就要回到第一个实质的结果：定理3.4。在现在的内容中，这就是说，如果$\pi_0(X)$仅包含一个元素，则$H^0(X)$仅包含常值映射。有理由期待同一论证一般地将能提供信息，它允许我们从关于$\pi_0(X)$的事实推断关于$H^0(X)$的事实；这就是我们马上要得到的：

4.5 定理 设$f:X\to Z$属于$H^0(X)$。如果作为X的点$x\sim x'$，则$f(x)=f(x')$。因而f分解为一个等价类集合上的函数，

$$X\longrightarrow\pi_0(X)\xrightarrow{c(f)}Z。$$

记$\mathrm{Map}(\pi_0(X), \mathbf{Z})$为集合$\pi_0(X)$上所有整值函数的集合。则函数的按点加法赋予$\mathrm{Map}(\pi_0(X), \mathbf{Z})$一个Abel群的结构，上面定义的映射

$$c: H^0(x) \longrightarrow \mathrm{Map}(\pi_0(X), \mathbf{Z})$$

是Abel群之间的内射同态。

证明　如果$x \sim x'$，我们可以找到一条道路$p: I \to X$连结x与x'。则$f \circ p: I \to \mathbf{Z}$是连续的；因为$I$连通，根据定理3.3，$f \circ p$是常值映射。因而

$$f(p(0)) = f(p(1)),$$

即

$$f(x) = f(x').$$

确实，我们可以再次证明关系$\sim$在$\mathbf{Z}$上是平凡的，因而$\pi_0(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$。则$c(f) = \pi_0(f)$。

$\mathrm{Map}(\pi_0(X), \mathbf{Z})$是Abel群的证明，留给读者作为练习（见第二章H2）。

设ξ是一般点$x \in X$的等价类。由下面的计算（利用c的定义和两个群中的加法的定义）

$$\begin{aligned} c(f_1 + f_2)(\xi) &= (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ &= c(f_1)(\xi) + c(f_2)(\xi) \\ &= (c(f_1) + c(f_2))(\xi), \end{aligned}$$

这蕴涵$c(f_1 + f_2) = c(f_1) + c(f_2)$，从而得到$c$是同态。

最后，如果$p: X \to \pi_0(X)$表示投影，则根据c的定义，$f = c(f) \circ p$。显然，如果$c(f) = c(g)$，就有

$$f = c(f) \circ p = c(g) \circ p = g. \quad \blacksquare$$

定理4.5包含了定理3.4的第一个论断，因为如果X是道路连通的，$\pi_0(X)$仅有一个元素，故所有$\pi_0(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$的映射都是常值映射。我们来研究第二个论断。这里有空间$Y = U \cup V$，它是

连通的但非道路连通的，虽然子集U和V都是道路连通的。显然，$\pi_0(Y)=\{U, V\}$，c的象仅包含常值映射$\pi_0(Y)\to Z$；因而c显然不是到上的。然而，正象前面看上去是合理的那样：对于"好"空间，连通性应该蕴涵道路连通性，所以，对于具有充分良好性态的X，这里可以期望c会是到上的。事实上，与前面相同的条件（l. p. c.）就是我们所需要的一种。为了逻辑上的发展，首先需要一个引理，它包含在定理3.6中，不过在那儿表现得不十分明白。

4.6 引理 设X是l.p.c.的，则它的道路连通分支在X中是开集。

证明 设ξ是道路连通分支，$x\in\xi$。因为X在x处是l.p.c.的，所以x有一道路连通邻域W。W中所有的点都能用道路与x连结，故$W\subset\xi$。因为ξ包含它的每个点的一个邻域，所以ξ是开集。■

4.7 定理 如果X是l.p.c.的，则

$$c: H^0(X) \longrightarrow \mathrm{Map}(\pi_0(X), Z)$$

是一同构。

证明 我们已经知道c是内射同态，剩下就是证明c是到上同态。而c是由$f=c(f)\circ p$来表示其特性的。因而，当且仅当

$$f=F\circ p: X \longrightarrow Z$$

是连续时，映射$F:\pi_0(X)\to Z$在c的象中。而对于每个$n\in Z$，$f^{-1}(n)$是所有使$F(\xi)=n$的道路连通分支的并。因为X是l.p.c.的，根据引理4.6，这些分支是开集，故据命题1.3，它们的并也是开集，所以再据定理1.1，f是连续的。■

群$H_0(X)$

现在我们回忆一下第二章自由Abel群，并介绍进一步的代数基础知识。忆及$F(X)$是(X,i)上的自由Abel群，其中

$$i: X \longrightarrow F(X),$$

以及对于任意Abel群A，映射

$$\mathrm{Hom}(F(X), A) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Map}(X, A)$$

是双射，其中i^*的定义为

$$h \xrightarrow{i^*} h \circ i.$$

我们将用到其中的两个自由Abel群：$F(X)$和$F(\pi_0(X))$。

定义 $H_0(X) = F(\pi_0(X))$。

由第二章最后的附注，投影 $p: X \longrightarrow \pi_0(X)$ 诱导一个群同态

$$F(p): F(X) \longrightarrow F(\pi_0(X)) = H_0(X),$$

它通过要求图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & \pi_0(X) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ F(X) & \xrightarrow[p_*]{} & H_0(X) \end{array}$$

交换来刻画。

从$F(\pi_0(x))$的万有映射性质，特别地，我们可推断

$$i^*: \mathrm{Hom}(H_0(X), Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(\pi_0(X), Z)$$

是一个同构。我们把它与定理4.5和定理4.7相结合，就可看到

4.8 定理 对于任何X，$(i^*)^{-1} \circ e = k: H^0(X) \to \mathrm{Hom}(H_0(X), Z)$ 是Abel群的内射同态。如果X是 $l.p.c.$的，则它是一个同构。■

进一步的发展

在引理4.3和定理4.5中发展起来的平凡性质，分别构成反变和协变函子的定义。对于范畴和函子的理论可参看 Freyd 的或 Mitchell 的著作。如同我们的记号所蕴涵的，H^0，π_0，H_0是有关的函子序列的第一个(或者宁愿说是第 0 个)成员。除了第14章，在那里我们定义H_1外，本书将只讲到H^1。但是，通常的定义太强调代数，以致看不见任何的几何意义。下一章将推广关系～。在高维的情况，函子π_n和H_n极少细述。但是对于有充分好性态的空间（如有限单纯复合形），它们保持类似于定理4.8的一个对偶关系，）代数拓扑学的任何一本书都会提到它的）。

Freyd, P., 《Abelian Categories》, Harper and Row, New York, 1964.

Mitchell, B., 《Theory of Categories》, Academic Press, New York, 1965.

练习和问题

1. 以类似于引理4.3和定理4.5的方式，建立由连续映射所诱导群$H_0(X)$的同态的性质。

2. a) 设$X=U\cup V$，其中U和V是X的不相交的开子集。在$\pi_0(X)$和$\pi_0(U)\cup\pi_0(V)$之间构造一个双射，并在$H^0(X)$和直积$H^0(U)\times H^0(V)$之间构造一个同构。

   b) 对于U和V都是闭集且有一个公共点的情况，求出与(a)中相对应的结果。

   c) 当$X=\bigcup_\alpha U_\alpha$是任意的开子集族$U_\alpha$的不相交并时，求出相应的结果。

3. 设$X=Y_1\times Y_2$。在$\pi_0(X)$和$\pi_0(Y_1)\times\pi_0(Y_2)$之间一般存在双射吗？$H^0(X)$和$H^0(Y_1)\times H^0(Y_2)$一般是同构的吗？在每一种情况，给出证

明或举出反例。

4. 关于连续映射$f:X\to Y$，以及$f_*:\pi_0(X)\to\pi_0(Y)$，$f^*:H^0(Y)\to H^0(X)$，指出下列论断中哪些一般是成立的。对每种情况给出证明或举出反例。

a) 如果f是到上的，f_*也是到上的。

b) 如果f是内射，f_*也是内射。

c) 如果f是双射，f_*也是双射。

d) 如果f是到上的，f^*是内射。

e) 如果f是内射，f^*是到上的。

5. 设X是Euclid空间的一个子集，Y是其闭包，$i:X\subset Y$。证明i^*是内射，举出X的一个例子，对于它来说，i_*既不是内射也不是到上的。

6. 找出R^3中的一个有界连通闭子集，它有无穷多个道路连通分支。

7. 设

$$X=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in Z,\ n>0\},$$

试描述同态c的象。

8. a) 设X是拓扑空间，x是X的一点。定义X中包含x的分支C_x为X中所有包含x的连通子集的并。证明$x\in C_x$，C_x是连通的并且C_x在X中是闭集；还有C_x包含X中x的道路连通分支。

b) 在X的点之间定义关系

$y\sim x$ 当 $y\in C_x$，

证明这是等价关系（等价类是X的分支）。

证明当X是 l.p.c.时，其分支与道路连通分支是相同的。

*9. 给$\pi_0(X)$以一个拓扑，其定义为，子集S是开集，如果$p^{-1}(S)$在X中是开集。证明这确实是一个拓扑，且使得p是连续映射。证明

$$p^*:H^0(\pi_0(X))\to H^0(X)$$

是一个同构。

10. 证明对于任意X和$\alpha\in H^0(X)$，如果$n\cdot\alpha(n\geqslant 1)$是零，则$\alpha=0$。

11. 设X是紧致的和 l.p.c.的，证明$\pi_0(X)$是有限集。

12. 证明如果X和Y是 l.p.c.的，则$X\times Y$也是 l.p.c.的。

第5章　同伦的定义

导言

现在推广前一章中的 $\pi_0(X)$ 的构造。这是由 X 的点之间的等价关系得到的。若 $\{0\}$ 是仅有一个元素的集合。一个映射 $\{0\}\to X$ 确定 X 的一个点（$\{0\}$ 的象），可以把那个映射与点等同起来。我们通过用任意空间替代 $\{0\}$ 进行推广。自然，这会使所讨论的对象比较难以想象。但是作为一个补偿的优点，我们发现其基本性质并不比在特殊情况下更难建立，然而，由于它们的一般性，就更有用得多，甚至会引导我们对研究的对象作某种重新考虑。

同伦的定义

两个映射 $f, g: Y\to X$ 称为是同伦的，如果存在连续映射 $F: Y\times I\to X$，使得对于所有 $y\in Y$，有

$$\begin{cases} F(y,0)=f(y), \\ F(y,1)=g(y). \end{cases}$$

在这种情况之下，称 F 为 f 和 g 间的同伦，记作 $F: f\simeq g$. 例如，若 f 同伦于常值映射，则称它是零伦的。对于 F，有时用另一个记号是方便的，即对于 $y\in Y$，$t\in I$，记

$$f_t(y)=F(y,t).$$

在这个记号中，虽然同伦不很明显，但对于把（连续）映射 $f_t: Y\to X$ 考虑作是由 $f=f_0$ 到 $f_1=g$ 的连续变形，或许会更容易些。

为了证实 f_t 是连续的这个论断，我们把它写作一个合成

$$Y \xrightarrow{i_t} Y\times I \xrightarrow{F} X,$$

其中i_t是这样的映射，它的分量是Y上的恒同映射和以t为象的常值映射。因为它们是连续的，因而（根据第1章的C4）i_t，以及$f_t=F\circ i_t$也是连续的。

5.1 引理 同伦是所有$Y\to X$的映射之间的一个等价关系。

证明

$f\simeq f$。用“常值”同伦$f_t=f$，更确切地说，用对于所有的t $F(y,t)=f(y)$来定义$F:Y\times I\to X$，因为$F=f\circ p_1$，故它是连续的，

$f\simeq g\Rightarrow g\simeq f$。设$F:f\simeq g$。定义$Y\times I$上的反身映射，$R_Y:Y\times I\to Y\times I$，为

$$R_Y(y,t)=(y,\ 1-t).$$

这是连续的，因为它的分量映射p_1和$R\circ p_2$——R作为实变量t的函数——是连续的。又因为F和R_Y连续，所以$F\circ R_Y:g\simeq f$是连续的。

$f\simeq g$和$g\simeq h\Rightarrow f\simeq h$。设$F:f\simeq g$和$G:g\simeq h$。我们必须改进引理4.3所构造的“两个道路的合成”。定义映射

$$F*G:Y\times I\to X$$

为

$$F*G(y,\ t)=\begin{cases} F(y,2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ G(y,2t-1), & 1/2\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

首先注意到当$t=\dfrac{1}{2}$时，函数在这些点(y,t)处定义过两次。但这两组值是一致的，因为

$$F(y,1)=g(y)=G(y,0).$$

显然$F*G$在$Y\times\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$和$Y\times\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$上是连续的，据定

理1.7，它在$Y\times I$上是连续的．■

把具有同伦关系的等价类称为同伦类．用$[Y, X]$表示映射$f: Y\to X$的同伦类的集合，和用$[f]$表示含有映射f的等价类．上面引出了$[Y, X]$是什么类型的集合的问题，但对于如何去计算它却没有提供线索．下面将给出计算上的一点进展．这里，我们来考察那些已经聚集在一起的、可以相互变形的所有映射．这表明我们已经抛开了所有$Y\to X$映射的空间的"连续部分"，而专注于"离散部分"．由此，我们有理由假定（事实上就是这个情况）同伦类比之映射本身更适宜于代数的处理．对于这个观点，这里以及在第8章将提供某些正当理由．下面的引理是平凡的，但指明了处理同伦集的途径．

5.2 引理 设

$$h: Z\to Y,\quad g_0,\ g_1: Y\to X,\ 和$$

$$f: X\to W$$

是连续映射．如果$g_0\simeq g_1$，则

$$g_0\circ h\simeq g_1\circ h,\quad 和\quad f\circ g_0\simeq f\circ g_1.$$

证明 设$G: Y\times I\to X$是g_0到g_1的一个同伦，则

$$f\circ G: Y\times I\to W$$

是$f\circ g_0$到$f\circ g_1$的一个同伦．对于结论的另一部分，定义$h\times 1: Z\times I\to Y\times I$为

$$(h\times 1)(z, t) = (h(z), t).$$

它有连续的分量

$$p_1\circ(h\times 1) = h\circ p_1\quad 和\quad p_2\circ(h\times 1) = p_2,$$

因而是连续的．所以

$$G\circ(h\times 1): Z\times I\to X$$

是$g_0\circ h$到$g_1\circ h$的一个同伦．■

在另一个记号中，我们可以更简单地把同伦写作$f\circ g_t$和$g_t\circ h$。然而，在证明它们作为相应的乘积空间上的函数的连续性上，会变得比较困难。

推论 若$g_0\simeq g_1:Y\to X$和$f_0\simeq f_1:X\to W$，则

$$f_0\circ g_0\simeq f_1\circ g_1:Y\to W.$$

因为，应用引理的两部分结论，我们有

$$f_0\circ g_0\simeq f_0\circ g_1\simeq f_1\circ g_1,$$

并由传递性（引理5.1）得到要求的结果。另外，我们也可以用同伦$f_t\circ g_t$去证。■

这个推论表明，同伦类$[f\circ g]$仅依赖于同伦类$[f]$和$[g]$。这样我们可以明确地定义同伦类的合成为

$$[f]\circ[g]=[f\circ g].$$

这样，所取的合成就定义了一个映射

$$[X,W]\times[Y,X]\to[Y,W].$$

回忆起1_X表示空间X上的恒同映射。

5.3 引理 设$h:Z\to Y$，$g:Y\to X$和$f:X\to W$.则

$$[g]\circ[1_Y]=[g]=[1_X]\circ[g],$$

$$([f]\circ[g])\circ[h]=[f]\circ([g]\circ[h]).\ ■$$

这些结果是直接的，因为所指出的代表映射的合成已经是相等的。然而，它们确实给予同伦关系的很平凡的性质以一个适当的形式。

同伦等价

我们定义$f:Y\to X$是具有同伦逆e的**同伦等价**，如果$[f]\circ[e]=[1_X]$，$[e]\circ[f]=[1_Y]$，或等价地，$f\circ e\simeq 1_X$和$e\circ f\simeq 1_Y$。当满足这些条件时，对于任何空间Z，由

$$[h] \longrightarrow [f]\circ[h]$$

$$[e]\circ[k] \longleftarrow [k]$$

所定义的映射$[Z,Y] \longleftrightarrow [Z,X]$，是一个双射(由引理5.3可得)；类似地，在$[Y,W]$与$[X,W]$之间也存在一个双射。这样在映射的同伦分类问题中，我们可以把空间X与Y实实在在地看作是等价的，称它们同伦等价。

例　设Y是球面$S^{p-1}\subset R^p\subset R^{p+q}$，和$X$是$R^{p+q}$中平面$x_1=\cdots=x_p=0$外的点的子集。则包含映射$f:Y\to X$是同伦等价。

因为，定义$e:X\to Y$为

$$e(x_1,\cdots,x_{p+q})=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_p,0\cdots,0),$$

其中$\lambda=(x_1^2+\cdots+x_p^2)^{-1/2}$，则$e\circ f=1_Y$，剩下就是构造$f\circ e$到$1_X$的同伦$H: X\times I\to X$。我们发现

$$H((x_1,\cdots,x_{p+q}),t)=(\lambda^{1-t}x_1,\cdots,\lambda^{1-t}x_p,tx_{p+1},\cdots,tx_{p+q})$$

正是这样的。

更一般地，仅仅假定$[f]\circ[e]=[1_X]$。在此情况下，我们称Y支配X。读者可以证明上面的映射$[Z,Y]\to[Z,X]$是到上的，$[Z,X]\to[Z,Y]$是内射（练习1(b)）。

同伦等价的一个特别重要的例子，是当X仅有一个点x的情况。若Y同伦等价于一个点，Y称为可收缩的。因为上面所做的那些，推广了前一章的内容，所以有$[\{x\},Z]=\pi_0(Z)$，同时，显然$[Z,\{x\}]$仅有一个元素。由上面的注，对于任一可收缩空间Y，$[Z,Y]$仅含有一个元素，而$[Y,Z]$一一地对应于$\pi_0(Z)$。

同伦集；群$H^1(X)$

我们所用的记号$[X,Y]$，强调了两个空间上的同伦集的对称相关性。然而，为了计算起来方便些，可固定一个空间，而把同

伦集看作是依赖于另一个空间．当我们这样做时，对于（同伦类的）合成引进一个新的记号，写作

$$[f]\circ[g]=f_*[g]=g^*[f].$$

因此我们可以把引理5.3改写为

5.4 引理 设$h:Z\to Y$，$g:Y\to X$，并设W是另一空间．则有映射

$$g^*:[X,W]\to[Y,W]$$

$1_X{}^*$是$[X,W]$上的恒同映射，且$h^*\circ g^*=(g\circ h)^*$．同时还有映射

$$g_*:[W,Y]\to[W,X];$$

1_{Y*}是$[W,Y]$上的恒同映射，且$g_*\circ h_*=(g\circ h)_*$．此外，如果$f:A\to B$，则

$$f_*\circ g^*=g^*\circ f_*:[X,A]\to[Y,B].\ \blacksquare$$

注意引理4.2是这个引理的第一个论断的特别情形（$W=Z$），而引理4.4则是第二个论断的特别情况（W是一个点）．现在正是进行到实际感兴趣的下一个特别情况的时候了：当W是一个圆的时候．

回忆起$S^1=\{z\in C:|z|=1\}$．由复数的标准性质，S^1是一个群，其乘积映射$m:S^1\times S^1\to S^1$是连续的，又反演$S^1\to S^1$（即$Z\to Z^{-1}$）也是连续的．一个拓扑空间，若它也是一个群并具有这些性质，则称为拓扑群．

5.5 引理 对于任意空间X，按点乘法赋予$X\to S^1$的连续映射的集合以 Abel 群的结构．它与同伦是相容的，因而集合$[X,S^1]$也得到了群的结构．如果$f:Y\to X$是连续的，则$f^*:[X,S^1]\to[Y,S^1]$是一个同态．

证明 设$c,d:X\to S^1$是连续映射．按点乘积$c\cdot d$定义为如下的合成

$$X \xrightarrow{(c,d)} S^1\times S^1 \xrightarrow{m} S^1,$$

其中(c,d)表示具有分量c和d的映射，因而是连续的。类似地，利用反演的连续性，我们看到按点之逆c^{-1}是连续的。显然对于这种乘法，映射到1的常值映射e起了作为单位元的作用，c^{-1}是c的逆，且乘积是交换和结合的。

设$C:c\simeq c'$和$D:d\simeq d'$。则C和D的按点乘积是连续的（如上所述），而且

$$C\cdot D: c\cdot d\simeq c'\cdot d'$$

因而$[c\cdot d]$仅与$[c]$和$[d]$有关，并且可把它表示为$[c]\cdot[d]$，又因为

$$[e]\cdot[c]=[e\cdot c]=[c],$$

$$[c^{-1}]\cdot[c]=[c^{-1}\cdot c]=[e],$$

$$[c]\cdot[d]=[c\cdot d]=[d]\cdot[c],$$

以及

$$([c_1]\cdot[c_2])\cdot[c_3]=[c_1\cdot c_2\cdot c_3]=[c_1]\cdot([c_2]\cdot[c_3]),$$

所以集合$[X,S^1]$继承了一个Abel群的结构。

最后，必须证明$f^*([c]\cdot[d])=f^*[c]\cdot f^*[d]$。事实上，我们只须证明

$$(c\cdot d)\circ f=(c\circ f)\cdot(d\circ f).$$

因为，在$y\in Y$处取值时，右边得到：

$$\begin{aligned}(c\circ f)\cdot(d\circ f)(y)&=(c\circ f)(y)\cdot(d\circ f)(y)\\&=c(f(y))\cdot d(f(y))\\&=(c\cdot d)(f(y))\\&=(c\cdot d)\circ f(y). \blacksquare\end{aligned}$$

以后我们总是用$H^1(X)$表示具有上面所述的群结构的$[X,S^1]$它与$H^0(X)$在记号上的相似是慎重的，它们之间的直接关系将在第8章中建立。

进一步的发展

这一章在形式上展开的绝大部分，严格地说，属于范畴论。描述范畴的公理本质上就是在引理5.3中对于同伦集证明的那些。同伦集的计算是高度发展的题目，例如，可参看Hu和Toda的著作。

Hu, S. T.,《Homotopy Theory》, Academic Press, New York, 1959.

Toda, H.,《Composition Methods in Homotopy Groups f Spheres》, Ann. of Math. Studies, 49, Princeton, (1962).

练习和问题

1. a) 若X和Y是同伦等价的，则对于任意W，在$[Y, W]$和$[X, W]$之间存在一个双射。给出详细的证明。

   b) 证明论断：如果Y支配X，则对于任意的Z，存在到上映射$[Z, Y]\to[Z, X]$和内射$[Z, X]\to[Z, Y]$，并证明，关于到Z的映射集合，也有相应的论断。

2. 证明Euclid空间中的任意凸子集是可收缩的。

3. 证明同伦等价是等价关系。

4. 证明在引理5.2后面所指出的同伦$h_t=f_t\cdot g_t$确实是连续的。

5. 证明任意非空空间支配一个点。

6. 寻找空间S，T，使得对于任意的X恰好存在一个连续映射$X\to S$和一个连续映射$T\to X$。

7. 证明：对于任意空间W，X，Y，在$[W, X\times Y]$与$[W, X]\times[W, Y]$之间存在一个双射。

8. 设X，Y是某个Euclid空间E的子空间；定义$X\amalg Y$为$E\times I$的子空间$X\times 0\cup Y\times I$。证明对于任意W，在$[X\amalg Y, W]$与$[X, W[\times[Y, W]$之间存在一个双射。

9. 设X与Y是同伦等价的，而W是任意空间。证明下列各对空间是同伦等价的。

a) $W\times X$与$W\times Y$，　　b) $X\times X$与$X\times Y$，

c) $W\amalg X$与$W\amalg Y$。

10. 证明$R^{n+1}-\{0\}$同伦等价于S^n。

11. 证明$C-\{0,1\}$，$S^1\times 1\cup 1\times S^1$，以及$S^1\times S^1-\{(1,1)\}$全都是同伦等价的。

12. 设$X=\{(p,q)\in S^n\times S^n : p\neq -q\}$。证明从$S^n$到$X$的映射$p\mapsto(p,p)$是一个同伦等价。

13. 证明$\{(a,b,c)\in R^3 : b^2>ac\}$同伦等价于一个圆，通过考虑方程$ax^2+2bxy+cy^2=0$的根来解释这个结果。

14. 证明$X=\{(a,b,c,d)\in R^4 : ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3=0$ 确定过原点的三条不同直线$\}$支配S^1〔提示：设这些直线与x轴的夹角分别为θ_1，θ_2，θ_3，并考虑$\theta_1+\theta_2+\theta_3\ (\mathrm{mod}\,\pi)$，从而得到映射$X\to S^1$。〕〔进一步的提示：$X$定义为$6abcd+3b^2c^2>a^2d^2+4(ac^3+b^3d)$，但这是与此问题无关的。〕

15. 设X是一个空间，$f:S^1\to X$。证明f是零伦的（同伦于常值映射）当且仅当存在一个连续映射$g:D^2\to X$使得$g|S^1=f$。〔提示：若$F:c\simeq f$，c是常值（映射），定义$g(rx)=F(x,r)$，对于$x\in S^1$，$r\in I$。〕

16. i)。证明如果（四元数的）乘法定义为

$$\begin{aligned}&(x_0,x_1,x_2,x_3)\cdot(y_0,y_1,y_2,y_3)\\ &=(x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3,\ x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2,\\ &\quad x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1,\ x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0),\end{aligned}$$

则S^3成为一个（非Abel）拓扑群，而且对于任意空间X，$[X,S^3]$是一个群。

ii)。证明对于$n\times n$酉矩阵群U_n和那些行列式为$+1$的酉矩阵的群SU_n有相同的结果。

iii)。证明P.12的例中的同胚并不是群的同构，但可诱导一个同构$S^3\to SU_2$。

第6章 圆的研究

导言

我们从考虑$R\to S^1$的指数映射开始这一章，并给出一些结果的全部证明，有时这些结果是不证自明的。这使我们可以定义由S^1到自身的映射度这个重要概念。在建立了映射度的基本性质后，我们用它们去证明所谓代数基本定理和平面上的Brouwer 不动点定理。

从S^1到R上的提升映射

我们定义映射$e:R\to S^1$为$e(t)=\exp(2\pi it)$。指数函数的通常性质说明e是连续的和到上的，而且是从加法群R到乘法群S^1的一个同态：

$$e(t+u)=e(t)e(u).$$

这个同态的核是整数子群Z。

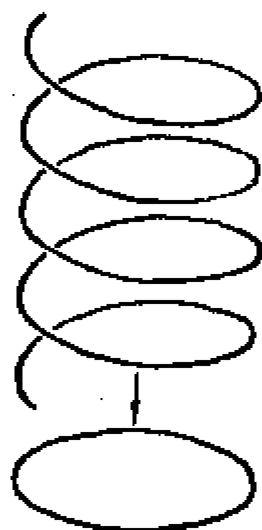


图6.1

我们拟用映射e研究圆的拓扑性质。要求读者把R看作是"覆迭于圆周S^1之上的、两端都无限延伸的"螺旋线，亦即e的图象。（图6.1）

设X是拓扑空间，$f:X\longrightarrow S^1$是连续映射。我们考虑以下的问题：是否存在一个连续映射$\tilde{f}:X\longrightarrow R$使得$f=e\circ\tilde{f}$？



如果$\tilde{f}$可以找到，称它为f的提升，并说f是可以提升的。$\tilde{f}$的存在性

问题就是众所周知的提升问题。在本章中，我们以所讲的几个特殊情况为限，以后再考虑一般情况。

下面我们需要 e 的相当详细的拓扑性质；我们从推证它们开始。

6.1 引理 映射 e 的限制 $e':]0,1[\longrightarrow S^1-\{1\}$ 是一个同胚。反之，设 B 是 $S^1-\{1\}$ 的任意子集，$A=I\cap e^{-1}(B)$。则 $e^{-1}(B)$ 是集合族 $A+n(n\in Z)$ 的并集，其中每一个集合在 $e^{-1}(B)$ 中是开集，且 e 诱导出每个集合到 B 上的一个同胚。

证明 由前面所述，e' 是连续的和双射的。剩下只需要证明 e'^{-1} 是连续的。对于每个 $x\in S^1-\{1\}$，选取一闭区间 $A\subset]0,1[$ 使得 $e'^{-1}(x)$ 在 A 的内部。因为 A 是紧致的，根据定理1.11 的推论，e' 诱导 A 到 $e'(A)$ 上的一个同胚。但是 $e'(A)$ 显然是 x 的一个邻域；所以 e'^{-1} 在 x 处连续。

为证明第二部分，只需证明它对于 $B_0=S^1-\{1\}$ 成立（其它情况也就成立）。然而 $e^{-1}(B_0)$ 是开区间族 $]n,n+1[=A+n(n\in Z)$ 的分离并，且据第一部分，e 诱导出其中每一个开区间到 B_0 上的一个同胚。■

注 上述的点 $1\in S^1$ 仅起一个记号的作用；对于 S^1 的任意真子集 B，类似的结论成立。

推论 假定 $f:X\longrightarrow S^1$ 不是到上的，则 f 是零伦。

因为引理表明去掉一个点的 S^1 同胚于 $]0,1[$，故是可收缩的。■

现在我们可以证明

6.2 定理 任意连续映射 $f:I\longrightarrow S^1$ 有一个提升 $\tilde{f}:I\longrightarrow R$，平移一个整数后，这个提升是唯一的。因而，如果给定 $a_0\in R$ 使得

$e(a_0)=f(0)$，则存在唯一的提升 $\widetilde{f}$ 使得 $\widetilde{f}(0)=a_0$。

证明 对于每个 $t\in I$，f 在 t 处的连续性蕴涵着可以找到一个 $\varepsilon>0$，使得 $f[t-\varepsilon,\ t+\varepsilon]$ 是 S^1 的一个真子集。（严格地说，f 只在 $[t-\varepsilon,\ t+\varepsilon]\cap I$ 上有定义。）根据 Heine-Borel 定理（引理1.10），存在有限多个区间 $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ 覆盖 I。把这些区间在 I 中的所有端点表示为

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1.$$

则每个 $[t_{i-1},\ t_i]$ 包含在某个区间 $[t-\varepsilon,\ t+\varepsilon]$ 之中，所以它们在 f 下的象是 S^1 的真子集 S_i。

我们将对 i 用归纳法证明：存在 $f|[0,t_i]$ 的唯一提升映射 $\widetilde{f}:[0,t_i]\longrightarrow \mathbf{R}$ 使得 $\widetilde{f}(0)=a_0$。对于 $i=0$，这是平凡的；假设对于 $i-1$ 结论成立。设 $b_i\notin S_i$（它是一个真子集）；命

$$e(c_i)=b_i,$$

又设

$$A_i=e^{-1}(S_i)\cap[c_i,\ c_{i+1}].$$

则引理6.1指出 $e^{-1}(S_i)$ 是开集族 A_i+n 的分离并，其中的每一个都同胚地映射到 S_i 上。设 n_i 是使 $\widetilde{f}(t_{i-1})\in A_i+n_i$ 的整数，$e_i:A_i+n_i\longrightarrow S_i$ 是由 e 诱导的同胚。则可以在 $[t_{i-1},\ t_i]$ 上定义 $\widetilde{f}$ 为 $e_i^{-1}\circ f$。根据定理1.7，它与 $[0,\ t_{i-1}]$ 上的 $\widetilde{f}$ 组合成一个 $[0,\ t_i]$ 上的连续函数。显然它提升了 f。反之，任意一个从 $[t_{i-1},\ t_i]$ 到 $\cup_n(A_i+n)$ 的连续提升映射：因为 $[t_{i-1},\ t_i]$ 是连通的，所以它必然全部映射到某一个 A_i+n 内（它们是分离的开集，故确定了一个分划），而因为 t_{i-1} 是映射到 A_i+n_i 内的，所以 $[t_{i-1},\ t_i]$ 必全部映射到 A_i+n_i 内。因而提升就唯一地确定了。这完成了归纳步骤，也就完成了定理的证明。■

6.3 引理 如果用 I^2 替换 I，$(0,0)$ 替换 0，定理6.2仍然成立。

证明　这可按相同的方式进行：我们仅指出与前面的证明不同之处。

我们选用其边平行于坐标轴的小矩形代替区间$[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$。Heine—Borel 定理仍可继续应用。用所有矩形的垂直边的 x 坐标去分割第一个因子 I 如前，水平边的 y 坐标分割第二个因子为 $0=u_0<u_1<\cdots<u_n=1$。在矩形

$$C_{ij}=\{(t,u): t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i,\ u_{j-1}\leqslant u\leqslant u_j\}$$

上归纳地扩张$\tilde{f}$。通过当$j<l$或当$j=l$而$i<k$时指定C_{ij}在C_{kl}的前面，从而赋予这些小矩形一个次序。

需要进一步指出的只有一点，就是在所有前面的方块上都已经定义了$\tilde{f}$，而试图在C_{ij}上定义$\tilde{f}$时，C_{ij}上$\tilde{f}$已经有了定义的部分（亦即C_{ij}与前面的方块的交）构成C_{ij}的左边，或下边，或它们的并（或，在C_{11}的情况，是左下角）。在各种情况中，这个集合是非空的和连通的。因而它在$\bigcup_n(A_{ij}+n)$中的$\tilde{f}$下的象，必然全部位于$A_{ij}+n_{ij}$内，这里n_{ij}是一个适当的整数。证明的其他部分没有什么变化。

映射度

现在我们准备研究S^1到自身的映射。设$f: S^1\longrightarrow S^1$，考虑图表

$$\begin{array}{ccc} I & \overset{g}{\dashrightarrow} & R \\ {\scriptstyle e|I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

根据定理6.2，映射g是$f\circ(e|I)$的一个提升。由于$e(0)=e(1)=1$，有

$$e(g(1))=f(e(1))=f(e(0))=e(g(0)),$$

所以$g(1)-g(0)$是一个整数．这个整数称为f的映射度，记作$\deg f$．f的任意其它的提升g'都可由g通过平移一个整数n而得到，所以

$$g'(1)-g'(0)=g(1)+n-(g(0)+n)=g(1)-g(0);$$

即，映射度与提升的选取无关．下面将指出映射度的概念对于解决我们关于圆的映射的所有问题是有效的．

6.4 定理 映射度定义了一个群同构

$$\deg: H^1(S^1)\cong Z.$$

关于$f:S^1\longrightarrow S^1$的下列各个条件是等价的：

i) f是零伦的．

ii) f的映射度为0．

iii) f有一个连续的提升$\tilde{f}:S^1\longrightarrow R$．

证明 定理最难的部分是证明互相同伦的映射有相同的映射度，从而映射度deg可以看作$H^1(S^1)$上的函数．我们首先证明这一点．

设$F:S^1\times I\longrightarrow S^1$是$f$与$f'$之间的一个同伦．考虑图表

$$\begin{array}{ccc} I\times I & \overset{G}{\dashrightarrow} & R \\ \downarrow{\scriptstyle (e|I)\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ S^1\times I & \xrightarrow{F} & S^1 \end{array}$$

根据引理6.3，可以构造一个提升G．用t，u表示$I\times I$中的坐标．现在g是f的一个提升．其中

$$g(t)=G(t,0).$$

因而

$$\deg f=G(1,0)-G(0,0).$$

类似地

$$\deg f' = G(1,1) - G(0,1).$$

考虑定义在I上的u的函数

$$d(u) = G(1,u) - G(0,u).$$

因为 $e(G(1,u)) = F(1,u) = e(G(0,u))$，故 d 取整数值。它也是连续的。又因为I是连通的，所以 d 是常值函数，而且

$$\deg f = d(0) = d(1) = \deg f',$$

这正是所需要证明的。

这样，我们就有了一个完全确定的映射

$$\deg: H^1(S^1) \longrightarrow Z.$$

它是一个同态，因为设 f，$f': S^1 \longrightarrow S^1$ 是连续的，又 g，$g': I \longrightarrow R$分别是$f\circ(e|I)$和$f'\circ(e|I)$的提升．则因为 e 是同态，所以$g+g'$就是$(f\circ f')\circ(e|I)$的提升．因而

$$\begin{aligned}\deg(f\cdot f') &= (g+g')(1) - (g+g')(0)\\ &= g(1) - g(0) + g'(1) - g'(0)\\ &= \deg f + \deg f'.\end{aligned}$$

为证明deg是到上的，列出映射度为 n 的映射就足够了。事实上，对于任意整数 n，考虑 n 次幂映射

$$p_n: S^1 \longrightarrow S^1,$$

其定义为 $p_n(z) = z^n$．又因为 e 是同态，所以映射 $t \longrightarrow nt$ 是 $p_n\circ(e|I)$的提升．p_n的映射度为$n\cdot 1 - n\cdot 0 = n$。

为证明deg是内射的，只需证明它的核为0，即映射度为 0 的映射是零伦的．而这正是论断(ii) $\Longrightarrow$ (i)．它将由我们现在就来进行的证明的最后部分得到。

(i) $\Longrightarrow$ (ii)，因为如果 f 同伦于 f_0，根据定理的第一部分 $\deg f = \deg f_0$，而常值映射的映射度为 0（其证明与对上面的p_n的证明相同）．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)，因为当 f 的映射度为 0 时，$f\circ(e|I)$ 有一个

提升 g 使得 $g(1)=g(0)$。现在定义 f 的提升 $\widetilde{f}: S^1 \longrightarrow R$ 为 $g\circ(e|I)^{-1}$。仅在 1 处可能出现混乱的情况：$(e|I)\{1\}=\{0,1\}$，但 $g(0)=g(1)$。$\widetilde{f}$ 在除去点 1 外各点处的连续性，可从 g 和 $(e|I)^{-1}$ 的连续性（引理6.1中指出的）得到，而在点 1 处的连续性由于它在每一侧都是连续的，如同在定理 1.7 所证明的那样也成立。我们也可把 S^1 分解成两个半圆，再直接应用定理 1.7。

(iii)$\Longrightarrow$(i)，因为 R 是可收缩的，故任意映射 $\widetilde{f}: S^1 \longrightarrow R$ 同伦于常值映射 $\widetilde{f_0}$；根据引理 5.2，$f=e\circ\widetilde{f}\simeq e\circ\widetilde{f_0}$。■

应用

现在提出映射度的概念的一个重要应用。

6.5 定理 （代数基本定理） C 上的任意多项式方程必有一个根。

证明 我们假定它没有根，从而找出矛盾。记该多项式为

$$P(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i，其中 a_n \neq 0。$$

用 a_n 去除各项，因而不失一般性，可设 $a_n=1$。定义映射 $F: S^1\times R_+ \longrightarrow S^1$ 为

$$F(z,r)=\frac{P(rz)}{|P(rz)|}.$$

若 P 不为零，则 F 是完全确定的，且显然是连续的。而且，如果记 $f_r(z)=F(z,r)$，则 F 在映射族 f_r 之间提供了一个同伦。而 f_0 是常值的，其映射度为 0 。我们将证明，对于足够大的 r，f_r 的映射度为 n。这就是所要求的矛盾。

选取

$$R>\max\left(\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|, 1\right).$$

则对于$|z|=1$，

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| R^i$$

$$\leqslant R^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$$

$$< R^n = |(Rz)^n|.$$

故

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i}{(Rz)^n}\right| < 1.$$

特别地，由此得到$P(Rz)/(Rz)^n$具有正的实部。因而

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n}\left|\frac{(Rz)^n}{P(Rz)}\right| = \frac{f_R(z)}{z^n}$$

也具有正的实部。根据引理6.1的推论，映射

$$z \longrightarrow \frac{f_R(z)}{z^n}$$

的映射度为0。所以$\deg f_R$等于映射$z \longrightarrow z^n$的映射度，后者前已证明为n。定理得证。■

另一个重要应用是

6.6 定理（平面上的 Brouwer 不动点定理） 任意映射$f: D^2 \longrightarrow D^2$有一个不动点。

证明 假定不是这样。则对于$x \in D^2$，x和$f(x)$是不同的。命$\phi(x)$是从点$f(x)$到点x的线段（延长线）与S^1的交点(图6.2)。显然，ϕ连续地依赖于x。

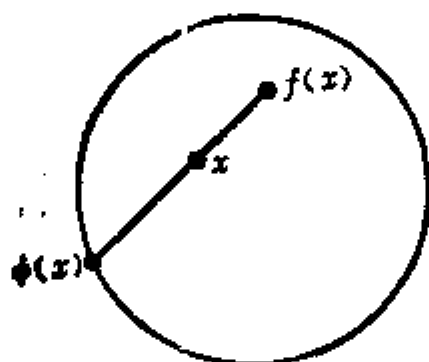


图6.2

因而 $\phi: D^2 \longrightarrow S^1$是一个映射；现在 $\phi|S^1$是恒同映射，映射度为1．另一方面，D^2是可收缩的，故ϕ同伦于常值映射，特别地，$\phi|S^1$也同伦于常值映射．因而它的映射度为0；这是一个矛盾．■

进一步的发展

我们在下一章将继续深入的计算．这里所使用的方法是针对涉及到的特殊情况的，所以多少有点特殊．然而，大部分结果是不难推广的．例如定理6.4可推广到双射

$$\deg: [S^n, S^n] \longrightarrow Z$$

的结构．任何一本关于同伦论的书(Hu, Maunder 或 Spanier)都可提供证明．

Hu, S.T.,《Homotopy theory》, Academic Press, New York, 1959.

Maunder, C. R. F.,《Algebraic Topology》, Van Nostrand, Princeton, 1970.

Spanier, E. H. ,《Algebraic Topology》, McGraw-Hill, New York, 1966.

练习和问题

1．运用第1章练习7的结果把引理6.1的推论推广到S^n．

2. a) 设 f 和 g 是映射 $S^1\to S^1$，使得 $f(1)=g(1)=1$。定义 $f\cdot g:S^1\to S^1$ 为

$$f\cdot g\ (z)=\begin{cases} f(z^2) & 若 z=x+iy,\ y\geqslant 0, \\ g(z^2) & 若 z=x+iy,\ y\leqslant 0. \end{cases}$$

证明 $f\cdot g$ 是完全确定的和连续的。

b) 用 $\deg f$ 和 $\deg g$ 计算 $\deg(f\cdot g)$，$\deg(f\circ g)$，$\deg(f\cdot g)$。

c) 下列映射

1，f，g，$f\cdot g$，$f\cdot g^{-1}$，$f^{-1}\cdot g$，$f\cdot 1$，$f\cdot g$，$f\cdot g^{-1}$，$g\cdot f$，$f\circ g$，$f\circ g^{-1}$，$g\circ f$，$g\circ f^{-1}$

中的任意两个必同伦吗？在这些映射中，尽可能多地写出你能找到的明显的同伦映射。

3. 证明 $\mathbf{C}$ 上的 n 次多项式方程有 n 个根（重根按重数计个数）。〔提示：用剩余定理〕。

4. 设 P 是 $\mathbf{C}$ 上的多项式函数，它在 S^1 上不为0。证明 $P(z)=0$ 的具有 $|z|<1$ 的根的个数等于映射 $f:S^1\to S^1$ 的度数，其中 $f(z)=P(z)/|P(z)|$。〔提示：分解 P，并首先证明当 P 是线性时的结果。〕

5. 设 S 如引理6.2中所示，证明 $e^{-1}(S)$ 同胚于 $S\times\mathbf{Z}$。

6. 设 $f:S^1\to S^1$ 使 $f(1)\neq 1$；又设 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可微并满足 $e\circ\phi=f\circ e$，假定 $\phi(x)$ 是整数时，$\phi'(x)\neq 0$。设存在 x 的 p 个值，且 $0<x<1$，使得 $\phi(x)$ 是整数，$\phi'(x)>0$，又有 q 个值使得 $\phi'(x)<0$。证明 $\deg f=p-q$。

7. 证明任意映射 $f:I\to I$ 有不动点。

8. 证明：若 $f:S^1\to S^1$ 和 $\deg f\neq 1$，则 f 有不动点。

9*. 映射 $f:Y\to X$ 是覆迭映射，如果对于每个 $x\in X$，可以找到 x 在 X 中的一个邻域 N，一个离散空间 D（例如有限集或 $\mathbf{Z}$）以及同胚 $\phi:N\times D\to f^{-1}(N)$，使得对于所有 $n\in N$，$d\in D$，$f(\phi(n,d))=n$。证明下列各点：

a) 若 $f:Y\to X$ 是覆迭映射 $X'\subset X$ 和 $Y'=f^{-1}(X')$，则 $f|Y':Y'\to X'$ 是覆迭映射，

b) 若 $f_1:Y_1\to X_1$ 和 $f_2:Y_2\to X_2$ 都是覆迭映射，则

$$f_1\times f_2:Y_1\times Y_2\to X_1\times X_2$$

也是覆迭映射。

c) 若$f:Y\to X$和$g:Z\to Y$都是覆迭映射，则

$$f\circ g:Z\to X$$

亦是覆迭映射。

d) $p_n:S^1\to S^1$是覆迭映射。

e) 若$f:Y\to X$是覆迭映射，$p:I\to X$，且$y\in Y$满足$f(y)=p(0)$，则存在唯一的$\widetilde{p}:I\to Y$使得$f\circ\widetilde{p}=p$且$\widetilde{p}(0)=y$。

f) 设

$$S^1\vee S^1=(S^1\times\{1\})\cup(\{1\}\times S^1)\overset{i}{\subset}S^1\times S^1,$$ （记号如引理8.3），

又设$f:L\to S^1\vee S^1$是$e\times e:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to S^1\times S^1$诱导的覆迭映射［与上述(a)中的相同］。试描述$L\subset\mathbf{R}^2$，并找一个不是零伦的映射$g:S^1$ L。证明

$$f\circ g:S^1\to S^1\vee S^1$$

不是零伦的。但$i\circ f\circ g$是零伦的。

10. 证明：若$x\in H^1(X)$且$n^*x=0$，则$x=0$。［提示：用$f:X\to S^1$代表x，证明$p_n\circ f\simeq 0$，并且把它提升。］

11. 设$f:S^1\to S^1$，定义$f':S^1\to\mathbf{C}$（求微分），使得

$$\deg f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{S^1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

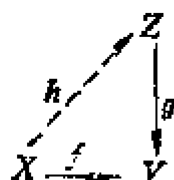
第7章 提升和扩张问题

导言

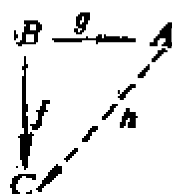
我们已经看到拓扑学研究的是拓扑空间和连续映射，还看到了空间和映射的结构与分类（例如用同伦分类）在这个课题的发展上起着很大的作用。在构造映射中，一个关键的问题是因子分解。

这有两种形式。

提升问题 给定 $f:X\to Y$，$g:Z\to Y$，何时存在 $h:X\to Z$ 使得 $g\circ h=f$？



扩张问题 给定 $g:B\longrightarrow A$，$f:B\longrightarrow C$，何时存在 $h:A\longrightarrow C$ 使得 $h\circ g=f$？



（它之所以称为扩张问题，是因为通常在实际中 B 是 A 的子空间，g 是包含映射，故 h ——如果它存在的话——把定义在 B 上的映射 f 扩张到 A 的全部。）

代数拓扑学的方法对于证明因子分解的不存在性，提供了一个标准的步骤，对此，我们将用一个简单的例子来说明。

例

$B=C=S^1$，$A=D^2$，$f=$恒同映射，$g=$包含映射。

不存在映射$1:S^1\longrightarrow S^1$到映射$D^2\longrightarrow S^1$的扩张。因为如果存在，考虑

$$\begin{array}{ccc} Z\cong H^1(B) & \xrightarrow{g^*} & H^1(A)=\{0\} \\ & \searrow f^*=1 \quad \nearrow h^* & \\ & Z\cong H^1(C) & \end{array}$$

我们有$1=f^*=g^*h^*=0$。但零映射与恒同映射$Z\longrightarrow Z$是不同的，这是一个矛盾。

一般，我们可以首先问，是否存在h^*以解出代数因子分解问题：

$h^*\circ g^*=f^*$（对于提升问题），

$g^*\circ h^*=f^*$（对于扩张问题）。

如果我们不能找到h^*满足它们，就必定不存在连续映射h。

问题的正面的解答只能来自构造映射h的直接方法。在这一章，我们提供两种这样的技巧。由于直接构造是困难的工作，因而这是本书最难的证明。

提升问题

对于提升问题，我们仅仅考虑当$g:Z\to Y$是$e:R\longrightarrow S^1$这种情况，对此我们给出两个结果。其一提供了一个较好的计算检验法（特别当π_1或H_1已知时，参阅(14.7)）其二在理论上则更有用。

7.1 **定理（单值定理）** 设X是$l.p.c.$空间，$f:X\to S^1$是映射。则f有提升$\tilde{f}:X\to R$当且仅当对于所有的连续映射$l:S^1\to X$，$\deg(f\circ l)=0$。

这种映射l称为（X中的）圈。

证明 首先假定$\tilde{f}$存在。则$\tilde{f}\circ l$是$f\circ l$的提升，根据定理6.4，$\deg(f\circ l)=0$。反之，假定对于任意圈l等式成立。

因为（据引理4.6）道路连通分支在X中是开集，如果对于每个道路连通分支C，可以把$f|C$提升到$\tilde{f}|C$。则当所有的$\tilde{f}|C$连续时，组合映射$\tilde{f}:X\to R$也是连续的。因而我们可以假定X是道路连通的。

现在取$x_0\in X$和$a_0\in R$使得$e(a_0)=f(x_0)$。对于任意$x\in X$，选取道路$p:I\to X$连结x_0到x。根据定理6.2，可以唯一地把$f\circ p$提升到$\widetilde{f\circ p}:I\to R$，使得$\widetilde{f\circ p}(0)=a_0$。如果$\tilde{f}$存在，$\tilde{f}\circ p$就是$f\circ p$的提升，故它等于$\widetilde{f\circ p}$，因而$\tilde{f}(x)$必等于$\tilde{f}(p(1))=\widetilde{f\circ p}(1)$。这样我们就定义$\tilde{f}(x)=\widetilde{f\circ p}(1)$。

下面证明这个值与p无关。因为若设$q:I\to X$是连结x_0到x的另一条道路，则p与q确定了一个圈$l:S^1\longrightarrow X$，其定义为

$$l(e(t))=\begin{cases}p(1-2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ q(2t-1), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

注意，在$t=\dfrac{1}{2}$处，$p(0)=x_0=q(0)$；同时有

$$l(e(0))=p(1)=x=q(1)=l(e(1)).$$

因而此定义是相容的。因为e^{-1}是连续的（引理6.1），所以l在每个半圆$\text{Im}z\geqslant 0$与$\text{Im}z\leqslant 0$上都连续。则根据定理1.7，l是连续的。据假设，$\deg(f\circ l)=0$。我们知道$f\circ l$有一个提升，称它为g，其中

$$g(t)=\begin{cases}\widetilde{f\circ p}(1-2t),\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \widetilde{f\circ q}(2t-1),\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

(再注意到它们在 $t=\frac{1}{2}$ 处是一致的，具有公共值a_0。)因而$g(0)=g(1)$，此即 $\widetilde{f\circ p}(1)=\widetilde{f\circ q}(1)$，这正是所要求的。

这样，$\tilde{f}:X\longrightarrow R$是一个完全确定的函数，使得$e\circ\tilde{f}=f$。至此就只剩下要证$\tilde{f}$是连续的。

设$x\in X$，因为f连续，则x有一个邻域W，使得$f(W)$是S^1的真子集。又因为X是 $l.p.c.$ 的，则可以找到x的道路连通邻域$U\subset W$。命$f(U)=S\subset S^1$，则据引理6.1，可以把$e^{-1}(S)$写成为某个集合的一族平移集合的分离并。把包含$\tilde{f}(x)$的那个平移集合记作A。我们将证明$\tilde{f}(U)\subset A$。这样就得到$\tilde{f}|U$是f与一个同胚的合成，这个同胚是S^1上由e^{-1}所诱导的到A上的同胚。所以$\tilde{f}|U$连续；因为U是x的邻域，所以$\tilde{f}$在x处连续。

为证明$\tilde{f}(U)\subset A$，设$y\in U$。选取从x_0到y的道路p，使它先经过x，那么它在U(U是道路连通的)内到达y。则$f\circ p$从$f(x_0)$走向$f(x)$，并在S内到达$f(y)$。所以$\widetilde{f\circ p}$从a_0走向$\tilde{f}(x)$(根据后者的定义)，并在$e^{-1}(S)$内到达$\tilde{f}(y)$。然而$e^{-1}(S)$中从A内开始的道路必须全部都在A中(参阅定理6.2的证明)，所以$\tilde{f}(y)\in A$，这正如所断言的。■

作为这个定理的一个推论，有下面的结果。

7.2 定理 设X和Y是连通的和$l.p.c.$的，$f:X\times Y\longrightarrow S^1$是映射。$(x_0,y_0)\in X\times Y$是一个点使得$f|X\times\{y_0\}$和$f|\{x_0\}\times Y$具有到$R$中的提升映射。则$f$也有连续的提升。

证明 我们必须证明：对于任意的圈$l:S^1\longrightarrow X\times Y$，$\deg(f\circ l)$

$=0$；事实上从定理7.1的证明可知，只需证明对于任意使$l(1)=(x_0,y_0)$的圈成立就足够了。设$l\circ(e|I)$有分量$p:I\to X$，$q:I\to Y$。我们必须证明如果这提升为映射$\widetilde{g}:I\to R$，则$\widetilde{g}(1)=\widetilde{g}(0)$。

定义映射$P:I\times I\to X$，$Q:I\times I\to Y$为

$$P(t,u)=\begin{cases} p\left(\dfrac{2t}{2-u}\right), & 0\leqslant t\leqslant 1-u/2, \\ p(1)=x_0, & 1-u/2\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

$$Q(t,u)=\begin{cases} q(0)=y_0, & 0\leqslant t\leqslant u/2, \\ q\left(\dfrac{2t-u}{2-u}\right), & u/2\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

则对于任意的u，$P(0,u)=x_0=P(1,u)$及$Q(0,u)=y_0=Q(1,u)$。记

$$G=f\circ(P\times Q):I\times I\to S^1.$$

则据引理6.3，G有连续的提升$\widetilde{G}:I\times I\longrightarrow R$。因为$G(0,u)=G(1,u)$，则$\widetilde{G}(1,u)-\widetilde{G}(0,u)$是整数，且与$u$无关。

命$u=0$，我们看到这个整数恰好是$\widetilde{g}(1)-\widetilde{g}(0)$。再命$u=1$，我们发现对于$0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，$(P\times Q)(t,1)$在$X\times\{y_0\}$中描出一个圈，对于$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$，在$\{x_0\}\times Y$中描出一个圈。定理的假设蕴涵其中每一个与$f$的合成映射度为0。所以

$$\widetilde{G}(0,1)=\widetilde{G}\left(\frac{1}{2},\ 1\right)=\widetilde{G}(1,1),$$

以及整数为0。■

现在我们进到关于$\widetilde{f}$的存在性的第二个判别准则，这就是f同伦于常值映射。更一般地，我们有

7.3 定理（对于 e 的同伦提升性质） 设 X 是空间，$\tilde{f}_0: X \to R$ 是映射，$F: X \times I \to S^1$ 是同伦，使得对于 $x \in X$，$F(x,0) = e(\tilde{f}_0(x))$。则存在唯一的同伦 $\tilde{F}: X \times I \longrightarrow R$ 使得 $e \circ \tilde{F} = F$ 和 $\tilde{F}(x,0) = \tilde{f}_0(x)$。

注意，这里不必假设局部道路连通。

证明 如果 $\tilde{F}$ 存在，则对于每个 $x \in X$，

$$t \to \tilde{F}(x,t)$$

是一条道路 $I \longrightarrow R$，它也是从 I 到 S^1 的映射 $t \longrightarrow F(x,t)$ 的提升，并且有 $0 \longrightarrow \tilde{f}_0(x)$。

据定理6.2，这些条件实际上决定了唯一的一条提升道路 $I \to R$。因此我们用 $\tilde{F}(x,t)$ 表示它在 t 处的值。由这个定义，性质 $e \circ \tilde{F} = F$ 及 $\tilde{F}(x,0) = \tilde{f}_0(x)$ 成立，而且我们已经证明了唯一性。我们还要证明所构造的映射 $\tilde{F}$ 是连续的。

对于每个 $(x,t) \in X \times I$，选取 $\varepsilon_{x,t}$ 使得

$$d((x',t'),(x,t)) < \varepsilon_{x,t}$$

蕴涵

$$|F(x',t') - F(x,t)| < 1.$$

区间族 $]t - \frac{1}{2}\varepsilon_{x,t},\ t + \frac{1}{2}\varepsilon_{x,t}[$ 构成紧致空间 I 的一个开覆盖。选取有限子覆盖，对应于 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，并设 ε 是所有这些 $\varepsilon_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{x,t_i}$ 中最小的，以及 $U = U_\varepsilon(x) \cap X$。我们将用对 i 的归纳证明，对于 $|t - t_i| < \varepsilon_i$，$\tilde{F}$ 在 (x,t) 处是连续的。

显然，可以假定区间

$$]t_{i-1} - \varepsilon_{i-1},\ t_{i-1} + \varepsilon_{i-1}[\text{与}]t_i - \varepsilon_i,\ t_i + \varepsilon_i[$$

有重迭。设 u_i 是一个公共点，并取 $u_1 = 0$。因而我们可以假定 $\tilde{F}|U \times \{u_i\}$ 在 (x, u_i) 处连续。由上面的构造，

$$F(U\times]t-\varepsilon_i,\ t+\varepsilon_i[)$$

是S^1的一个真子集S；如同在引理6.1中那样，记

$$e^{-1}(S)=\bigcup_{n\in Z}A+n,$$

其中记号A选取为使得$\widetilde{F}(x,\ u_i)\in A$。因为$\widetilde{F}|U\times\{u_i\}$在$(x,\ u_i)$处连续，故在$U$中存在$x$的邻域$V$使得$\widetilde{F}(V\times\{u_i\})\subset A$。因为$A$是连通的，故对于每个$y\in V$，

$$\widetilde{F}(\{y\}\times]t-\varepsilon_i,\ t+\varepsilon_i[)\subset A.$$

因而

$$\widetilde{F}(V\times]t-\varepsilon_i,\ t+\varepsilon_i[)\subset A.$$

设$e':A\longrightarrow S$是e的限制；据引理6.1，它是同胚映射。则

$$\widetilde{F}|(V\times]t-\varepsilon_i,t+\varepsilon_i[)=e'^{-1}\circ F|(V\times]t-\varepsilon_i,t+\varepsilon_i[),$$

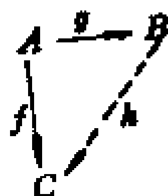
是两个连续映射的合成，所以它也是连续的。这就完成了归纳步骤。■

推论 对于任意空间X，映射$f:X\to S^1$有提升$\widetilde{f}:X\to R$当且仅当它同伦于一个常值映射。

必要性是平凡的：因为R是可收缩的，$\widetilde{f}$是零伦的，因而$e\circ\widetilde{f}=f$也是零伦的（比较定理6.4中(iii)⇒(i)的证明）。反之，若$F:f_0\simeq f$，且f_0是常值映射，其象为z，选取$a_0\in R$使得$e(a_0)=z$，又设$\widetilde{f}_0$是象为a_0的常值映射。则根据定理，可把同伦F提升到$\widetilde{F}:X\times I\longrightarrow R$。则由$\widetilde{f}(x)=\widetilde{F}(x,1)$所定义的映射$\widetilde{f}:X\to R$就是$f$的提升。■

扩张问题

现在我们进入本章开始提到的第二个问题，并联系图表



显然，如果 h 存在，$g(x)=g(y)$ 蕴涵

$$f(x)=h(g(x))=h(g(y))=f(y).$$

要作的一个合理的假设是使 g 是一个内射；而更方便的是假定 g 是嵌入。进一步，如果说 $a\in A$ 是 B 中一个点的序列 $\{b_n\}$ 的极限，则必须假定点列 $\{f(b_n)\}$ 的极限存在，并定义为 $h(a)$。为了避免这些分析上的问题，假定 A 事实上就是 B 的闭子空间是明智的。因而我们只限于考虑这样的问题：定义在 B 的闭子空间 A 上的映射 f，是否有在 B 上的连续的扩张。因为我们已经绕过了因子分解问题的分析上的困难，因而这个限制了的问题实际上就是代数问题。

在这一章中，我们给出解决一种在特殊情况下扩张问题的重要结果。

7.4 定理（Tietze扩张定理） 设 B 是空间，A 是其闭子空间，J 是实数的一个闭区间。则任一连续映射 $f: A\longrightarrow J$ 有一连续扩张映射 $F: B\longrightarrow J$。

因为所有的闭区间都是同胚的，所以可用区间 $[-1, 1]$ 替换 J。首先证明一个引理。

7.5 引理 设 $h: A\to R$ 对于所有的 $x\in A$，有 $|h(x)|\leqslant k$。则存在连续映射 $H: B\longrightarrow R$ 使得对于 $x\in B$，$|H(x)|\leqslant\frac{1}{3}k$ 以及对于 $x\in A$，$|h(x)-H(x)|\leqslant\frac{2}{3}k$。

证明 设

$$A^+ = h^{-1}\left[\frac{1}{3}k, k\right] \text{和} A^- = h^{-1}\left[-k, -\frac{1}{3}k\right];$$ 因为 h 是连续的，所以它们都是 A 的闭子集。又因为 A 在 B 中是闭集，所以 A^- 和 A^+ 在 B 中也是闭集。根据引理1.4，$x\to d(x,A^+)$ 是从 B 到 R_+ 的连续函数，它仅在 A^+ 上的值为0；对于 A^- 有类似的结果。因而 $d(x,A^+)+d(x,A^-)$ 在 B 上永不为0，以及函数

$$H(x)=\frac{1}{3}k\ \frac{d(x,A^-)-d(x,A^+)}{d(x,A^-)+d(x,A^+)}$$

是完全确定的并在 B 上连续；显然，$|H(x)|\leqslant\frac{1}{3}k$。

又如果 $x\in A$ 且 $h(x)\geqslant\frac{1}{3}k$，则 $x\in A^+$，且 $d(x,A^+)=0$，故有

$H(x)=\frac{1}{3}k$ 和

$$0\leqslant h(x)-H(x)\leqslant\frac{2}{3}k.$$

若 $h(x)\leqslant-\frac{1}{3}k$，有类似的结果。但是如果 $-\frac{1}{3}k\leqslant h(x)\leqslant\frac{1}{3}k$，则

$$|H(x)-h(x)|\leqslant|H(x)|+|h(x)|\leqslant\frac{2}{3}k. \blacksquare$$

定理7.4的证明　给定 $f:A\to[-1,1]$。根据引理，取 $k=1$，$h=f$，我们可以找到 $F_1:B\to\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$，使得对于 $x\in A$，$|f(x)-F_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}$。再对 $k=\frac{2}{3}$，$h=f-F_1|A$ 应用引理。归纳地假定对于 $i\leqslant n-1$，映射 $F_i:B\longrightarrow R$ 已经构造好了，使得在 B 上 $|F_i(x)|\leqslant 2^{i-1}/3^i$，以及对于 $x\in A$，

$$\left|f(x)-\sum_{r=1}^{i}F_r(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

应用引理，取

$$h = f - \sum_{r=1}^{n-1}(F_r|A) \text{ 和 } k = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

我们得到满足相应条件的映射F_n。据归纳法，可以假定对于所有的i，F_i已经构造好了。则因为$|F_i(x)| \leqslant 2^{i-1}/3^i$，序列$\sum F_i$在$B$上一致收敛（根据Weierstrass M-判别法），故（参阅下文）它的和是一个完全确定的、连续的映射$F: B \to R$，使得

$$|F(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1.$$

在不等式中让i趋向无穷，我们看到，对于$x \in A$，$f(x) = F(x)$。因而$F(x)$满足定理所要求的条件。■

为了那些不熟悉一致收敛性概念的读者，这里我们提供在定理7.4的证明中由$\sum F_i$所定义的映射F的连续性的完整证明。

给定$b \in B$和$\varepsilon > 0$，我们必须找到$\delta > 0$，使得$b' \in B$，$d(b, b') < \delta$蕴涵$|F(b) - F(b')| < \varepsilon$。选取$n$使得$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon/3$。则对于所有的$b' \in B$，

$$\left|F(b') - \sum_{1}^{n} F_i(b')\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon/3.$$

因为$\sum_{1}^{n} F_i$是连续的，存在δ使得$d(b, b') < \delta$蕴涵

$\left|\sum_{1}^{n}(F_i(b) - F_i(b'))\right| < \varepsilon/3$。但转过来这就蕴涵着$|F(b) - F(b')| < \varepsilon$。这正是我们需要证明的。

推论 设J是R中的开区间，A和B如定理所说，则任一连

续映射$f: A \longrightarrow J$有连续扩张$F: B \longrightarrow J$。

证明 因为所有的开区间（无论是有限或无限长）都是同胚的（参阅练习1.5），可以假设$J =]-1,1[$。

据定理7.4，f有扩张设$g: B \to [-1,1]$。设$C = g^{-1}\{-1,1\}$。则C是B的闭子空间，且与A是分离的。定义$h: A \cup C \to I$为$h(A) = 1$，$h(C) = 0$。因为A和C是闭集，所以h是连续的。再据定理7.4，它有连续扩张$k: B \to I$。现在可以定义F为$F(x) = g(x)k(x)$。■

7.6 命题 设B是空间，A是其闭子空间。又设$f_0: B \to S^1$，且$g_t: A \to S^1$是$g_0 = f_0 | A$的同伦。则g_t可扩张为f_0的同伦f_t。

证明 定义h_t为$h_t(a) = g_t(a)/g_0(a)$。它是常值映射$A \to 1$的同伦；根据定理7.3，可把它提升为常值映射$A \to 0$的一个同伦$A \times I \longrightarrow R$。因为$B \times 0 \cup A \times I$是$B \times I$的闭子集，据定理7.4的推论，可以把上面的提升扩张为常值映射$B \to 0$的同伦$B \times I \to R$。把此扩张投影成同伦k_t，再命$f_t = k_t \circ f_0$。■

推论 设B是空间，A是其闭子空间，且$g: A \longrightarrow S^1$是零伦映射。则g可扩张为连续映射$f: B \to S^1$。

取f_0和g_0为命题7.6中的常值映射。还是提升为映射$A \to R$，据定理7.4的推论把它扩张到B上，再投影下来。■

进一步的发展

我们关于提升问题的讨论集中在对于e的覆迭同伦性质(CHP)，它的大部分可不作任何变化地推广到一般的"覆迭空间"（例如参阅练习6.9，和Spanier或Massey的著作）；某些可推广到具有CHP的任意映射（"纤维"）。最后一个结论，命题7.6

(HEP)，对于扩张问题起一个对偶的作用。关于这些性质和它们在提升与扩张问题中的作用的较详尽的讨论，可在例如 Hu，Spanier 的著作或Steenrod 笔记中找到

Hu，S. T.，《Homotopy Theory》，Academic Press，New York，1959.

Massey，W. S.，《Algebraic Topology：An Introduction》，Harcourt，Brace and World，New York，1967.

Spanier，E. H.，《Algebraic Topology》，MaGraw-Hill，New York，1966.

"Steenrod 笔记"是指 N. E. Steenrod 所作的一些打字讲义《上同调运算与扩张连续函数的障碍》(Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions)。过去这一直可从 Princeton大学得到，但现在据我所知，得不到了。它们写得很美。

练习和问题

1. 试举一例：有空间 B，其闭子空间 A 及映射 $f:A\to S^1$，但 f 不能扩张成连续映射 $B\to S^1$。
2. 将 J 置换为下列各种情况，证明定理7.4相应的结果：

   a）半开区间$[0, 1[$；

   b）$\mathbf{R}^2$中的闭正方形：$0\leqslant x_1\leqslant 1$，$0\leqslant x_2\leqslant 1$；

   c）$\mathbf{R}^2$中的开正方形：$0<x_1<1$，$0<x_2<1$；

   d）$\mathbf{R}^n$；

   e）D^n。
3. 空间 X 是$\mathbf{R}^2$中三条直线段：

$$x=0,\ -2\leqslant y\leqslant 1;\quad y=-2,\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$x=1,\quad -2\leqslant y\leqslant 1.$$

与曲线

$$y=\sin(1/x),\ 0<x\leqslant 1$$

的并。构造一个映射 $f:X\to S^1$ 使得(i) 对于每个圈 $l:S^1\to X$, $\deg(f\circ l)=0$, 但(ii)不存在连续的提升 $\widetilde{f}:X\to \mathbf{R}$。证明你的映射 f 满足(i)和(ii)。

4. 假定连续映射 $f:X\to Y$ 使得对于每个圈 $m:S^1\to Y$, 存在一个圈 $l:S^1\to X$ 且使得 $m\simeq f\circ l$ 又设 Y 是 $l.p.c.$ 的，且 $g:Y\to S^1$ 是映射使得 $g\circ f$ 有连续的提升 $X\to \mathbf{R}$。则 g 有连续的提升。证明这个论断。为证明：如果 g 有一个提升，则 $g\circ f$ 也有，你需要一些什么条件？

5. 利用下面得到的结果，重作定理7.3的证明。设 $l:S^1\to X\times Y$ 有分量映射 λ 与 μ，给定 l 到

$$(\lambda\times\{y_0\})*(\{x_0\}\times\mu)$$

的同伦，后者的定义如练习6.2所示，然后用那个练习计算 $\deg l$。

6. 称子空间 $B\subset A$ 对于 X 具有HEP，如果对于任一映射 $f:A\to X$ 和 $h_0=f|B$ 的同伦 $h_t:B\to X$，存在 $f_0=f$ 的同伦 f_t 使 $f_t|B=h_t$。

a) 证明：如果 $B\subset A$ 对于 X 具有HEP且 $f\simeq g:B\to X$，则 f 与 g 中如有一个能扩张成映射 $A\to X$，另一个就也能扩张。

b) 证明：如果 $B\subset A$ 对于所有的空间都具有HEP，则在 A 中存在 B 的邻域 U 及映射 $r:U\to B$ 使得 $r|B$ 是恒同映射。〔提示：取 $X=A\times 0\cup B\times I$，以明显的方式定义 f 和 h_t，并用映射 f_1。〕

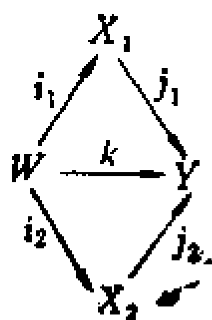
第8章 计　　算

导言

在前一章作了艰难的预备工作后，现在我们准备提供计算群$H^1(X)$的例子。首先证明一个一般性的结果以作为主要工具。它采取正合序列的形式：这在代数拓扑学的结果中是具有典型性的。虽然我们所要求的群，并不是明确地确定的，但实际上对于任何感兴趣的情况都提供了可能确定它的充分的信息，只是要用到一种或两种技巧。我们将通过一些简单的例子说明这些技巧，而以计算乘积空间的H^1作结束。

Mayer-Vietoris 定理

这一节中我们固定用下面的记号。Y是空间，X_1，X_2是闭子空间，使得$X_1\cup X_2=Y$，记$W=X_1\cap X_2$（它也是闭集）。用



表示各个子空间的包含映射，使得$k=j_1\circ i_1=j_2\circ i_2$。

8.1 定理　存在同态

$\delta^*:H^0(W)\longrightarrow H^1(Y)$

使得下面的序列是正合的：

$$0 \longrightarrow H^0(Y) \xrightarrow{\{j_1^*, -j_2^*\}} H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)}$$

$$\longrightarrow H^0(W) \xrightarrow{\delta^*} H^1(Y) \xrightarrow{\{j_1^*, -j_2^*\}} H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^1(W).$$

证明

$H^0(Y)$ 处的正合性。设$h:Y\to Z$表示 $\mathrm{Ker}\{j_1^*, -j_2^*\}$的一个元素，则

$$0 = j_1^*(h) = h\circ j_1 = h|X_1.$$

类似地，$h|X_2 = 0$。因为$Y = X_1 \cup X_2$，于是$h = 0$。

$H^0(X_1)\oplus H^0(X_2)$ 处的正合性。我们有

$$(i_1^*, i_2^*)\{j_1^*, -j_2^*\} = i_1^* j_1^* - i_2^* j_2^*$$
$$= k^* - k^* = 0.$$

反之，设(g_1, g_2)是核的一个元素，则

$$0 = i_1^*(g_1) + i_2^*(g_2) = g_1|W + g_2|W.$$

定义$h:Y\longrightarrow Z$为$h|X_1 = g_1, h|X_2 = -g_2$。因为它们在 $X_1\cap X_2 = W$上是一致的，所以 h 是完全确定的。据定理 1.7，它是连续的。又因为$g_1 = h|X_1 = j_1^*(h)$，$g_2 = -h|X_2 = -j_2^*(h)$，所以偶$(g_1, g_2) = \{j_1^*, -j_2^*\}(h)$。

论证的其余部分是类似的、只是涉及的内容更多一些。

δ^*的定义。设$f:W\longrightarrow Z$是连续映射。根据定理7.4的推论，可把它扩张为一个连续映射$g:X_1\longrightarrow R$。定义$h:Y\longrightarrow S^1$为

$$h|X_1 = e\circ g, \quad h(X_2) = \{1\}.$$

它们在W上是一致的（因为$g(W) = f(W)\subset Z$），其中每一个都是连续的，因而据定理1.7，h 是连续的。

我们还必须证明 h 的同伦类与扩张 g 的选取无关。设 g_0，g_1

是两个扩张. 定义同伦为

$$g_t(x)=(1-t)g_0(x)+tg_1(x).$$

容易验证它是连续的，且$g_t|W=f$。则用

$$h_t|X_1=e\circ g_t,\quad h_t(X_2)=\{1\}$$

所定义的h_t，恰好是h_0与h_1间所需要的同伦。

因而我们可以明确地定义 $\delta^*(f)$是 h 的一个同伦类，且可以直接得到δ^*是同态。

$H^0(W)$处的正合性。证明$\delta^*\circ(i_1^*,i_2^*)=0$等价于证明 $\delta^*\circ i_1^*=0$和$\delta^*\circ i_2^*=0$。现在如果把$g_1:X_1\longrightarrow Z$限制为$f=i_1^*(g_1):W\to Z$，在计算$\delta^*(f)$时就可以用 f 的扩张g_1。则得到对应的映射 h 是常值映射，所以$0=\delta^*(f)=\delta^*i_1^*(g_1)$。下面假定 f 是$g_2:X_2\to Z$的限制。如前面所说，$g:X_1\to R$ 是 f 的扩张。则 g 与 g_2 在W上是一致的，所以给定一连续映射$\tilde{h}:Y\to R$；而且$e\circ\tilde{h}=h$。因为 h 有连续提升，所以它是零伦的，这证明了$\delta^*\circ i_2^*=0$。

反之，设 $f:W\longrightarrow Z$使得映射$h:Y\longrightarrow S^1$是零伦的，后者如上所述是利用 f 的扩张 $g:X_1\longrightarrow R$来确定的。根据定理 7.3可以找到连续的提升$\tilde{h}:Y\longrightarrow R$。因为$h(X_2)=\{1\}$，$\tilde{h}(X_2)\subset Z$，所以通过限制$\tilde{h}$定义了一个映射$g_2:X_2\longrightarrow Z$。而且$\tilde{h}|X_1$与 g 是同一个映射$h|X_1=e\circ g$的两个提升。这样可以定义一连续映射$g_1:X_1\longrightarrow Z$为

$$g_1(y)=g(y)-\tilde{h}(y).$$

但对于$w\in W$，g_1与g_2二者都是确定的，且

$$f(w)=g(w)=g_1(w)+g_2(w).$$

因而$f=(i_1^*,i_2^*)(g_1,g_2)$。

$H^1(Y)$处的正合性。我们从证明 $j_1^*\circ\delta^*=j_2^*\circ\delta^*=0$ 开始。设 f,g,h与δ^*的定义中相同。则$j_2^*\circ\delta^*(f)$的代表是常值映射$h|X_2$，所以等于 0，而$j_1^*\circ\delta^*(f)$的代表是$h|X_1=e\circ g$，因为它有一提升，所

以是零伦的。

假设给定$H^1(Y)$的一个元素，它在$\{j_1^*, -j_2^*\}$下的象为 0，即在j_1^*与j_2^*二者下的象同时为0。则这个元素的代表映射 $h: Y\longrightarrow S^1$在X_1与X_2上的限制都是零伦的。根据命题7.6，$h|X_2$ 与常值映射 $X_2\longrightarrow\{1\}$的同伦可以扩张为 h 的同伦。因而可以用同伦于h的映射$h': Y\longrightarrow S^1$替换 h，其中$h'(X_2)=\{1\}$。而$h'|X_1$同伦于$h|X_1$，故它也是零伦的。因而它有连续的提升$g: X_1\longrightarrow R$。若$f=g|W$，则 f 是映射$W\longrightarrow\{1\}$的提升，所以它在$\mathbf{Z}$中取值。显然，$\delta^*(f)$以h'为其代表，因而等于h'或 h 的同伦类。$H^1(X_1)\oplus H^1(X_2)$ 处的正合性。这里的论证非常类似于 0 维的情况。首先有

$$(i_1^*, i_2^*)\{j_1^*, -j_2^*\}=i_1^*j_1^*-i_2^*j_2^*$$
$$=k^*-k^*=0.$$

其次，设 $g_1: X_1\longrightarrow S^1$与 $g_2: X_2\longrightarrow S^1$ 代表核中的一个元素。则$H^1(W)$中用$g_1|W$与$g_2|W$所确定的类的和为 0，所以 $g_1|W$同伦于$(g_2|W)^{-1}$。根据命题7.6，可把这个同伦扩张为g_1 的一个同伦，再用同伦于g_1的映射$g_1': X_1\longrightarrow S^1$替换$g_1$，其中

$$g_1'(w)=(g_2(w))^{-1}，对于所有w\in W。$$

现在定义$h: Y\longrightarrow S^1$为$h|X_1=g_1'$　和

$$h(y)=(g_2(y))^{-1}，对于所有y\in X_2。$$

据定理1.7，这是一连续映射，而且据定义，$\{j_1^*, -j_2^*\}(h)$是由(g_1', g_2)或等价地是由(g_1, g_2)所确定的类。

现在我们已经证明了定理的所有论断。 ■

初步计算

我们将提供一些例子来说明如何运用这个结果进行计算。强调以下一点或许是有价值的，即一般的计算通常正好是这样一些简单步骤巧妙的组合。

8.2 引理 设$X=X_1\cup X_2$是X的一个分划．则存在同构

$$H^0(X)\cong H^0(X_1)\oplus H^0(X_2),$$
$$H^1(X)\cong H^1(X_1)\oplus H^1(X_2).$$

证明 由假设，X_1与X_2中的每一个在X中都是闭集．因而可应用定理8.1得到一正合序列．因为$X_1\cap X_2$是空集，所以$H^0(X_1\cap X_2)$与$H^1(X_1\cap X_2)$均为0，从而得到两个正合序列

$$0\longrightarrow H^0(X)\longrightarrow H^0(X_1)\oplus H^0(X_2)\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow H^1(X)\longrightarrow H^1(X_1)\oplus H^1(X_2)\longrightarrow 0.$$

由正合序列的简单性质就可得到所要的结果．■

当然，在这种情况下，容易直接证明上述结果；然而，这个结果对于显然可见的形式是有用的（注意到用归纳法可把它推广到分裂为有限多个分支的情况），这个方法还可以推广到下面的一些情况．现在就来考虑当$X_1\cap X_2=\{P\}$正好是由一点构成的情况．因为这里每个（连续）映射$\{P\}\to Z$可扩张为一个（例如常值）映射$X_1\longrightarrow Z$，所以$H^0(X_1)\longrightarrow H^0(P)$是到上的．据正合性，映射

$$\delta^*:H^0(P)\longrightarrow H^1(X_1\cup X_2)$$

为0．再应用上述的正合性，可导出下面引理的第一部分．

8.3 引理 假定X_1、X_2在X中是闭集，其并是X，交为唯一的点P；这时，记作$X=X_1\vee X_2$．则存在同构

$$H^1(X)=H^1(X_1\vee X_2)\cong H^1(X_1)\oplus H^1(X_2),$$
$$H^0(X)\oplus Z\cong H^0(X_1)\oplus H^0(X_2).$$

而且，如果X_2是连通的，则$H^0(X)\cong H^0(X_1)$．

因为在正合序列

$$0\longrightarrow H^0(X)\longrightarrow H^0(X_1)\oplus H^0(X_2)\longrightarrow H^0(P)\xrightarrow{0}$$

中，$H^0(P)$同构于Z，因而是自由的，所以据命题2.7，序列是可分裂的。如果X_2是连通的，映射$H^0(X_2)\longrightarrow H^0(P)$是同构。据定理2.6的推论，可得到所求的结果，或者也可直接证明得到。■

更有趣的是当 $X_1\cap X_2$ 包括两个点的情况。最重要的例子出现于

8.4 定理 设$Y=X\cup A$，其中X在Y中是闭集，A是P，Q为端点的弧且$X\cap A=\{P,Q\}$。如果X有一个把P与Q分离的分划，则

$$H^0(X)\cong H^0(Y)\oplus Z \quad 及 \quad H^1(Y)\cong H^1(X).$$

否则，有同构$H^0(Y)\cong H^0(X)$及一正合序列

$$0\longrightarrow Z\longrightarrow H^1(Y)\longrightarrow H^1(X)\longrightarrow 0.$$

如果在X中存在一条连接P与Q的道路（例如若X是$l.p.c.$的），则这序列是可分裂的，从而

$$H^1(Y)\cong H^1(X)\oplus Z.$$

证明 因为A是一段弧，因而它是紧致的，根据引理 1.9，它是闭集。这样我们可以应用定理8.1。而 $H^1(A)=H^1(P)=0$，据引理8.2，

$$H^0(X\cap A)\cong H^0(P)\oplus H^0(Q)\cong Z\oplus Z,$$

$$H^1(X\cap A)\cong H^1(P)\oplus H^1(Q)=0.$$

因而正合序列具有下面的形式

$$0\longrightarrow H^0(Y)\longrightarrow H^0(X)\oplus H^0(A)\longrightarrow H^0(P)\oplus H^0(Q)$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(Y)\longrightarrow H^1(X)\longrightarrow 0.$$

然而（因为A是可收缩的）限制映射$H^0(A)\longrightarrow H^0(Q)$是一个同构。应用定理2.6，可以"消去"那些项从而得到

$$0\longrightarrow H^0(Y)\longrightarrow H^0(X)\xrightarrow{\lambda} Z\xrightarrow{\delta} H^1(Y)\longrightarrow H^1(X)\longrightarrow 0,$$

这里对于 $f: X \longrightarrow Z$，有$\lambda(f)=f(P)-f(Q)$。

下面分两种情况．首先假定存在分划$X=X_1\cup X_2$使得$P\in X_1$，$Q\in X_2$（图8.1）。则任意映射$g:\{P,Q\}\longrightarrow Z$，通过定义 $g(X_1)=g(P)$，$g(X_2)=g(Q)$，都可扩张到X上.特别地，λ是到上的。

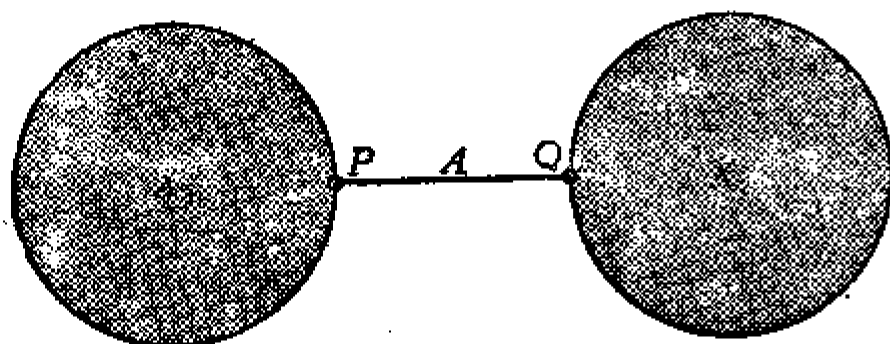


图 8.1

由正合性，$\delta=0$。所欲证明的结果如同在引理 8.3 中那样同样成立．实际上，对于这种情况，通过把引理转用于$X_1\vee A$及$(X_1\cup A)\vee X_2$，便可得到它的另一个证明。

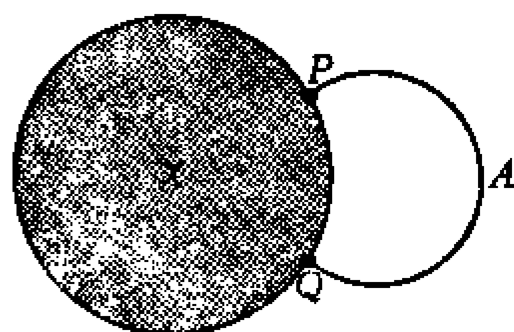


图8.2

其次假定没有这样的分划（图8.2）。则 $\lambda=0$，因为如果$f: X\to Z$ 使得$f(P)\neq f(Q)$，就可以定义 $X_1=f^{-1}(f(P))$ 而得到一种分划。因而定理的第二个论断成立。

最后，假定在X中存在一条道路连结P与Q．我们可以把它看作是一段以P与Q为端点的弧B及映射 $i: B\to X$ 显然，可假定 $A\cap B=\{P,Q\}$．则 i 可扩张为映射

$$j: A\cup B\to A\cup X=Y,$$

因为$A\cup B$同胚于S^1，所以有

$$j^*: H^1(Y)\longrightarrow H^1(A\cup B)\cong H^1(S^1)\cong Z.$$

我断言它（差一个符号）左逆于 δ，因而据练习 2.5，序列是可分裂的。

事实上，应用上面的证明过的内容，只是要把X换成B，得到一个正合序列：

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\delta'} H^1(A\cup B) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow 0.$$

因为B是一段弧，所以$H^1(B)=0$且δ'是同构。考虑

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\delta} & H^1(A\cup X) & \longrightarrow & H^1(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow j^* & & \downarrow i^* & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\delta'} & H^1(A\cup B) & \longrightarrow & H^1(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由 δ 的定义，不难看出$j^*\circ\delta=\delta'$，但δ'是同构。因而$(\delta')^{-1}\circ j^*$确实是 δ 的左逆。■

图

在上面定理8.4的情况中，即 $Y=X\cup A$ 中，其中A是一段弧，X在Y中是闭集，而$X\cap A$正好是A的两个端点，我们说Y是在X上粘贴上一弧而得到的。现在归纳地定义一个（有限）图：它是一个空间，这个空间是由有限多个点 $P_1,\cdots,P_N$（顶点）和相继粘贴上去的有限多段弧所得到的，这些弧以其中的一些点P_i为端点（图8.3）

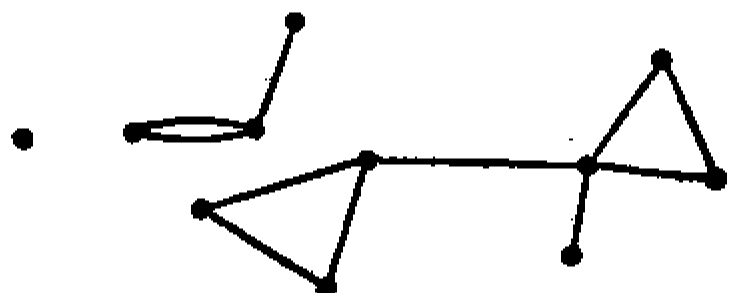


图 8.3

图G的某些性质可由归纳的结构得到。首先，G是紧致的（练习1.14）。其次，G是$l.p.c.$的（练习3.12）。则G有有限多个道路连通分支（显然，因为弧是道路连通的）。最后，从定理8.4归纳地得到$H^1(G)$是有限秩的自由 Abel 群。下面将指出何计算它的秩，据命题2.4，它是完全确定的。

首先考虑$\pi_0(G)$。因为弧是道路连通的，所以每个道路连通分支至少包含顶点P_i中的一个。其次，两个顶点P_i，P_j位于同一个道路连通分支中，如果它们可由一段弧P_iP_j连结起来，或更一般地，若存在一系列弧，例如

$$P_iP_r,\ P_rP_s,\ P_sP_j$$

连结起来。反之，我们如果取可以与P_i如此连结起来的那些顶点，以及过这些顶点的弧的并，在G中就有了一个开集，因而得到一个道路连通分支，所以$\pi_0(G)$的确定是简明的。

8.5 定理 设G是有α_0个顶点及连结它们的α_1条弧的图。又设G有β_0个分支，β_1是自由Abel群$H^1(G)$的秩。则

$$\alpha_0-\alpha_1=\beta_0-\beta_1.$$

因而，要确定β_1，仅需如上面求出$\pi_0(G)$并且数出顶点及棱的个数。

证明 对α_1作归纳。若$\alpha_1=0$，G仅由α_0个点P_i组成。因为$H^1(P_i)=0$，故据引理8.2，得到$\beta_0=\alpha_0$及$\beta_1=0=\alpha_1$。

假定G是由G'上粘贴上一段弧而得到的；假设定理中的结果对于G'成立并由此导出对于G也成立就足够了。对于G'，用β_0'表示β_0；其它的记号也类似地表示。则根据归纳的结构

$$\alpha_0=\alpha_0',\qquad \alpha_1=\alpha_1'+1,$$

而据归纳假设，有

$$\alpha_0'-\alpha_1'=\beta_0'-\beta_1'.$$

又据定理8.4，

$$\beta_0=\beta_0'-1, \qquad \beta_1=\beta_1'$$

或 $$\beta_0=\beta_0', \qquad \beta_1=\beta_1'+1.$$

无论哪种情况，立即得到

$$\alpha_0-\alpha_1=\beta_0-\beta_1. \quad ■$$

乘积

对于任意两个空间X与Y，在$\pi_0(X\times Y)$与$\pi_0(X)\times\pi_0(Y)$之间存在自然的双射（练习 4.3）。如果X与Y都是$l.p.c.$的，则$X\times Y$也是$l.p.c.$的（练习3.12），我们就可以导出$H^0(X\times Y)$的形式。例如，设$\pi_0(X)$和π_0（Y）是有限的（据练习3.11，若X与Y紧致，这是成立的），并分别有r和s个元素。则$\pi_0(X\times Y)$有rs个元素，$H^0(X)$，$H^0(Y)$和$H^0(X\times Y)$分别是秩为r，s和rs的自由Abel群。

对于H^1，除X和Y是$l.p.c.$外，又从假设二者都是连通的开始。选取点$x_0\in X$，$y_0\in Y$并定义内射

$$i_1:X\longrightarrow X\times Y, \qquad i_2:Y\longrightarrow X\times Y$$

为

$$i_1(x)=(x,y_0), \qquad i_2(y)=(x_0,y).$$

则有诱导映射，并可把它们适当配置成

$$(i_1^*,i_2^*):H^1(X\times Y)\longrightarrow H^1(X)\oplus H^1(Y).$$

8.6 定理　若X,Y是连通和$l.p.c.$的，则映射

$$(i_1^*,i_2^*):H^1(X\times Y)\longrightarrow H^1(X)\oplus H^1(Y)$$

是一同构

证明　在刚刚引进的记号下，定理7.2表明这个映射是内射。而到上性是容易证明的。因为给定映射$f:X\longrightarrow S^1$，$g:Y\longrightarrow S^1$，

如果我们定义$F: X\times Y \longrightarrow S^1$为

$$F(x,y)=f(x)g(y),$$

则显然 $i_1\circ F\simeq f$ 和 $i_2\circ F\simeq g$. 事实上，如果我们已经要求 $f(x_0)=g(y_0)=1$，这里就应有等式. ■

在更一般的情况中，X 与 Y 是l.p.c.的，但有有限多个道路连通分支，这时还会得到某个结果. 因为若记这些分支为

$$X_1,\ \cdots,\ X_r,\qquad Y_1,\ \cdots,\ Y_s,$$

则$X\times Y$是l.p.c.的，具有道路连通分支$X_i\times Y_j$（$1\leqslant i\leqslant r$，$1\leqslant j\leqslant s$）. 根据引理8.2，有

$$H^1(X\times Y)=H^1(X_i\times Y_j)\text{的直和},$$

$$1\leqslant i\leqslant r,\qquad 1\leqslant j\leqslant s.$$

但由定理8.6，

$$H^1(X_i\times Y_j)\cong H^1(X_i)\oplus H^1(Y_j).$$

所以$H^1(X\times Y)$是一个大直和，其中每个$H^1(X_i)$算 s 次，而每个$H^1(Y_j)$ 算 r 次. 回忆起（再据引理8.2）$H^1(X)$ 是 $H^1(X_i)$ 的直和，我们得到

推论 若X,Y是l.p.c.的，并且分别有 r，s 个道路连通分支，则$H^1(X\times Y)$等于 s 个$H^1(X)$与 r 个$H^1(Y)$的直和. ■

最后，记$r=\beta_0(X)$并假定$H^1(X)$是秩为$\beta_1(X)$自由Abel群，对于Y也有相应的记号. 则 $H^1(X\times Y)$ 是自由 Abel 群，并有等式

$$\beta_0(X\times Y)=\beta_0(X)\beta_0(Y)$$

$$\beta_1(X\times Y)=\beta_0(X)\beta_1(Y)+\beta_1(X)\beta_0(Y).$$

进一步的发展

这一章的所有方法与结果均可自然地推广到高维的情况；可参阅代数拓扑学方面的任何一本书，例如Spanier 或 Maunder 的著作. 关于乘积的最后结果的类比是

$$\beta_n(X\times Y)=\sum_{i+j=n}\beta_i(X)\beta_j(Y).$$

Maunder, C. R. F., 《Algebraic Topology》, Van Nostrand, Princeton, 1970.

Spanier, E. H., 《Algebraic Topology》, McGraw-Hill, New York, 1966.

练习和问题

1. 设$Y=S^1$，又设X_1，X_2是半圆$\mathrm{Im}Z\geqslant 0$和$\mathrm{Im}Z\leqslant 0$。计算定理8.1的序列中所有的群和同态，并证明序列是正合的。

2. 在定理8.1中，假定X_2和Y是连通的。证明

$$0\to H^0(X_1)\to H^0(W)\xrightarrow{\delta^*}H^1(Y)$$

是正合的。

3. a）设X_1与X_2是Euclid空间可收缩的闭子集。证明$H^1(X_1\cup X_2)\oplus\mathbf{Z}$同构于$H^0(X_1\cap X_2)$。

 b）设$X\subset\mathbf{R}^n$；X_1表示$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^{n+1}$中直线段的并；这些直线段是把$X\times 0$中的点与点$0\times 1$连结起来的。类似地，$X_2$表示与点$0\times(-1)$连结的直线段的并，证明$X_1$，$X_2$是可收缩的，因而可应用（$a$）。记$SX=X_1\cup X_2$。

*4. 举出空间Y的例子，使得$H^1(Y)$不是自由Abel群（运用前一个练习，取$X=\mathbf{Z}$。）

5. 假定在δ^*的定义中（定理8.1），互换X_1与X_2所扮演的角色，证明得到的是$-\delta^*$。

6. 证明：如果X_1，X_2是Y的开子集，定理8.1中在$H^0(Y)$与$H^0(X_1)\oplus H^0(X_2)$的正合性仍然成立。举例说明当X_1是闭子集，X_2是开子集时，上述结论不成立。

*7. 证明：如果X_1，X_2二者在$X=X_1\cup X_2$中同时是开集或闭集，则存在一正合序列

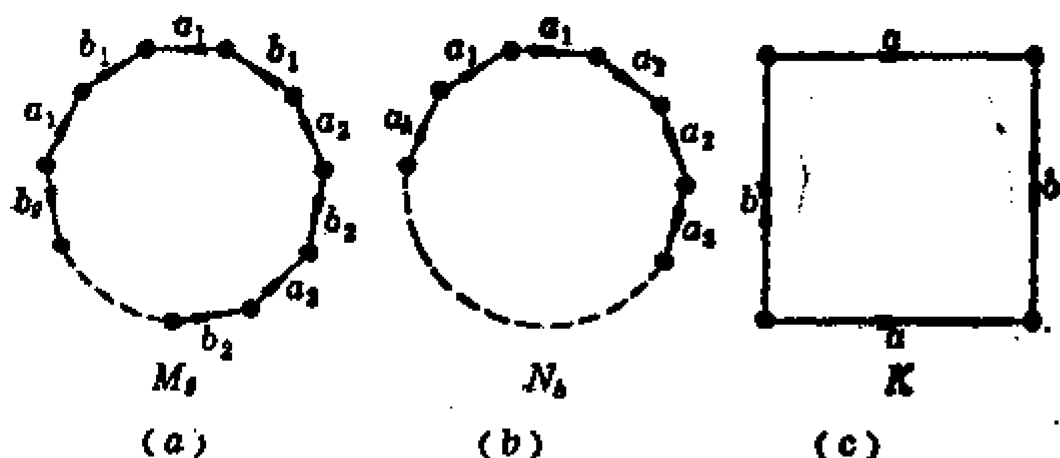
$$H_0(X_1\cap X_2)\to H_0(X_1)\oplus H_0(X_2)\to H_0(X)\to 0.$$

8. 证明$H^2(S^n)=0$，$n>1$。〔应用定理8.1于两个半球面。〕

9. 设$Y=X\cup A$。假定存在同胚$\phi:D^n\to A$使得$\phi(S^{n-1})=A\cap X$。证明：如果$n>2$，$H^1(Y)\cong H^1(X)$，并描述当$n=2$时，如何确定$H^1(Y)$。

10. 设$Y=X\cup A$。假定存在连续映射$\phi:D^n\to A$使得$\phi^{-1}(X)=S^{n-1}$以及$\phi|(D^n-S^{n-1})$是内射。从Y中挖去半径为1/2的与D^n同心的开圆盘而得到Y'。证明Y'同伦等价于X，因而上一题的结果仍可适用。

11. 如图8.4(a)所示，把正4g边形作一扭曲使它的边一对一对粘合得到M_g。运用上一题或其它方法，计算$H^1(M_g)$和$H^1(M_g$ 一一点)。



(a) (b) (c)

图 8.4

12. 如上题，而所用的曲面N_h是把正2h边形如图8.4(b)而得到的。

13. 如前题，而曲面K见图8.4(c)。已知K同胚于M_g，N_h中的一个，定出是哪一个。（类似地，试验某些这类更进一步的图形。）

14. 设$P_j\in\mathbf{C}$是点$\exp(2\pi ij/n)$，$0\leqslant j<n$。选取ε使$0<\varepsilon<\frac{1}{2}d(P_0,P_1)$，

并设

$$X=\{Z\in\mathbf{C}:|Z|\leqslant 2,\ |Z-P_i|\geqslant\varepsilon,\ \text{对于每个}\ i\}。$$

又设G是图，它是所有圆$|Z-P_i|=$ 和连结0与$(1-\varepsilon)P_i$的所有线段的并。证明包含映射$G\subset X$是同伦等价，从而计算$H^1(X)$。

15. 设G是S^1与一些直线段的并，这些直线段连结着$\frac{1}{2}$与1的三个立方根。定义$f:G\to S^1$为从0点出发的投射。计算$H^1(G)$，并运用这一计算来

描述映射$f^*:H^1(S^1)\to H^1(G)$。

*16. 用定理8.6的推论的假设，推得自然同构

$$H^0(X\times Y)\to H^0(X)\otimes H^0(Y),$$

$$H^1(X\times Y)\to (H^0(X)\otimes H^1(Y))\oplus(H^1(X)\otimes H^0(Y)).$$

17. 设G是连通的有限图。证明关于G的下列条件是等价的：

(i)G的顶点的个数比棱的条数多1。

(ii)G可这样归纳地构造出来：从一个点出发，重复地增加一条棱使得它与已经构造好的部分有一公共顶点。

(iii)G是可以收缩的。

(iV)$H^1(G)$仅有一个元素。

如果G满足这些条件，称G为树。

18. 图中的环道是有很多个不同顶点构成的序列P_0，P_1，…，P_n，使得对于每个i，$0\leqslant i\leqslant n$，存在一条棱$P_i\ \ _{i+1}$，并且$P_n P_0$也是一条棱。证明一连通图是一棵树当且仅当它不包含环道。

19. G是一连通图，T_1是其子图并且是一棵树。证明存在子图T，$T_1\subseteq T\subseteq G$，使得(i)$T$是树，且(ii)$T$包含$G$的所有顶点。

20. G是一连通图，$T\subseteq G$是包含所有顶点的树，用a_1，…，a_n表示G其它的棱；设a_i的端点是P_i与Q_i。图Γ是n个具有公共顶点A的三角形$AB_i\ G_i$的并。定义$f:G\to\Gamma$为$f(T)=A$，再用R_i，S_i把a_i三等分，$f|a_i$把线段$P_i\ R_i$，$R_i\ S_i$，$S_i\ Q_i$分别线性地映射到AB_i，$B_i\ G_i$，$G_i\ A$上。又定义$g:\Gamma\to G$为把$B_i\ G_i$线性地映射到$P_i\ Q_i$上，把AB_i，AG_i映射到T中的道路（因为T连通，这是可能的）。证明$f\circ g$同伦于Γ上的恒同映射，且$g\circ f$同伦于G上的恒同映射。

21. 从上一题导出连通图G和H是同伦等价的，当且仅当$\beta_1(G)=\beta_1(H)$。任意两个（有限）图G和H，若具有$\beta_0(G)=\beta_0(H)$，$\beta_1(G)=\beta_1(H)$，它们就同伦等价，这是正确的吗？

22. 构造两个有限连通图G和H使得

$$\alpha_0(G)=\alpha_0(H),\qquad \alpha_1(G)=\alpha_1(H).$$

但G和H却是不同胚的。

23. 如果G和H是同胚的，证明可以重新剖分这些图，把附加的分点算作顶点，使得存在一个同胚，它把顶点映射到顶点，棱映射到棱。

24. 证明通过适当选择顶点，$\mathbf{R}^n$ 中直线段的任意有限并，均可看作一个图。

25. 设G是$\mathbf{R}^3$中的图，并把$\mathbf{R}^3$看作$\mathbf{R}^3\times 0\subset\mathbf{R}^4$，$A$是点$(0, 0, 0, 1)$，$C$是连结$A$与$G$中顶点的线段的并。证明$H^1(G\cup C)$是秩为$a_1(G)$的自由Abel群。运用定理8.1，构造正合序列

$$0\to H^0(G)\to C^0\xrightarrow{d}C^1\to H^1(G)\to 0,$$

其中C^0，C^1分别是秩为a_0，a_1的自由Abel 群。运用练习 2.16 推导定理8.5。

26. 在上面的题中，对于G的每一（有向）棱 PQ，定义$r(PQ):H^1(G\cup C)\to Z$为取映射$f:G\cup C\to S^1$在圈 $APQA$ 上的限制的映射度。证明通过对每条棱选取一个定向，得到 $H^1(G\cup C)$ 与G的棱上的自由Abel群之间的同构。以此求出上面的映射$d:C^0\to C^1$。

27. 可得到这个结果的另一个证明如下。把每条棱 PQ分成邻接着的三段弧$PP'Q'Q$的并。用X_1表示以G的一个顶点 为端点的那些弧的并；X_2表示“三段弧中的中间”那些弧的并。记$X_1\cap X_2$为始点（例如P'）的集合I 与终点（例如Q'）的集合F的并。则由定理8.1导出一正合序列

$$0\to H^0(G)\to H^0(X_1)\oplus H^1(X_2)\to H^0(I)\oplus H^0(F)\to H^1(G)\to 0,$$

其中映射 $H^0(X_2)\to H^0(F)$是同构。据定理2.6消去它，并求出所导致的映射$H^0(X_1)\to H^0(I)$。

第II部分

对 偶 定 理

第9章　Eilenberg分离性判别准则

导言

第I部分的主要目的是应用第I部分的结果以得到在平面子集情况下的更详细的见闻。一个一般性的问题是子集的拓扑和它的余集的拓扑之间的关系，并且我们的主要结果是指出一个紧致子集的内蕴性质是如何确定其余集的分支数的。这包括有名的Jordan曲线定理作为其特殊情况：如果一个平面子集同胚于S^1，它的余集有两个分支。在本章中将为这个定理准备一般性质的一些简单结果，然后得到用紧致子集分离平面上两点的必要和充分的条件（此论题的判别准则）。

把点为(x, y)的Euclid空间R^2与复数$z=x+iy$的空间C等同起来是很方便的。用这种记号，点z_1和z_2之间的距离恰好是$|z_1-z_2|$。我们要经常使用复数的模和幅角，故引入记号

$$N(z)=z/|z|,\quad z\neq 0。$$

于是N是一个连续映射

$$N:C-\{0\}\longrightarrow S^1。$$

余集的分支

开头一些结果在任何Euclid空间中都是成立的。

9.1引理　如果K是R^n中的紧致子集，则R^n-K是$l.p.c$的。

证明　根据引理1.9，K在R^n中是闭集，因此R^n-K是开集。但据3.5(i)，R^n是$l.p.c$的，又据3.5(ii)，任意开子集也是$l.p.c$的。■

这个结果表明，对于R^n-K不必为其连通性的不同的定义而担心。我们把R^n-K的道路连通分支简单地叫做分支（对于一般的分支的定义，见练习4.8）。如果R^n-K的两个点位于R^n-K的不同的分支中，我们就说它们是被K分离的。也就是说，不能用R^n-K中的道路去连结它们。

9.2引理　设K是R^n的紧致子集，A是R^n-K的一些分支的并，则$A\cup K$在R^n中是闭集。

证明　设$B=R^n-K-A$是R^n-K的其余的分支的并。因为R^n-K是$l.p.c$的，据引理4.6，这些分支在R^n-K中是开集。因此据命题1.3，它们的并B也是开集。因为R^n-K在R^n中是开集，B也是开集。而它的余集$A\cup K$是闭集。■

9.3引理　设K是R^n的紧致子集。则R^n-K恰有一个无界的分支，比如称作U，而R^n-U是有界的。

证明　因为K是紧致的，据定理1.8，它是有界的，比如说对于$z\in K$，$|z|\leqslant R$。定义

$$E=\{P\in R^n:d(P,0)>R\}.$$

显然〔练习3.1(a,iii)〕，E是道路连通的，因为它与K相离，所以它位于R^n-K的某个分支U中。则K本身以及R^n-K的另外那些分支与E不相交，因此，R^n-U被包含在中心为0和半径为R的

闭球体内。

用平面紧致集合分离点

9.4定理（Eilenberg判别准则）　设K是C的紧致子集；a，b是$C-K$的点。则a和b在$C-K$的同一分支内当且仅当由

$$f(z)=N\left(\frac{z-a}{z-b}\right),\quad z\in K$$

定义的映射$f:K\to S^1$是零伦的。

证明　首先假定这两个点在同一个分支中。设$p:I\to C-K$是一条道路，使得$p(0)=a$，$p(1)=b$。则f到一个常值映射的同伦可定义为

$$H(z,t)=N\left(\frac{z-p(t)}{z-b}\right).$$

现在假定这两点在不同的分支中。我们将假设f是零伦的，并由此导出一个矛盾。设A是$C-K$包含a的一个分支。假定A有界是方便的。如若不然，我们可以通过交换a和b来得到有界性（根据引理9.3），并且只需用反演$1/f$代替f即可。

因为f是零伦的并且K在C中是闭集，因此在$C-A$中是闭集，故可应用命题7.6的推论推出f可以扩张成一个连续映射

$$g_1:C-A\longrightarrow S^1,$$

而且我们还可以假设g_1是零伦的。现在定义f的表达式对于所有$\neq a, b$都是有意义的。于是可以认为它定义了f的一个连续的扩张，

$$g_2:A\cup K-\{a\}\longrightarrow S^1.$$

现在g_1和g_2在它们的定义域的交K上是一致的，于是又定义了f的一个扩张映射

$$F:C-\{a\}\longrightarrow S^1.$$

而且，据定理1.7 F 是连续的，因为 $C-A$ 在 C 中是闭集（据引理9.1，A 是开集），并且根据引理9.2 $A\cup K$ 在 C 中是闭集。

于是我们可以定义同伦

$$H: S^1\times I \longrightarrow S^1$$

为

$h_t(z)=H(z,t)=F(a+z(\varepsilon+tR))$，$|z|=1, 0\leqslant t\leqslant 1$；因而据定理6.4，$\deg h_0=\deg h_1$。因为 A 是有界的，对于充分大的 R 和对于任意的 $z\in S^1$，$a+z(\varepsilon+R)$ 将不在 A 中。因为 g_1 是零伦的，则 h_1 也是零伦的，因而 $\deg h_1=0$。

另一方面，因为 A 是开集，如果 ε 足够小，则我们将有：对于所有 $z\in S^1$，$(a+z\varepsilon)\in A$。于是

$$h_0(z)=F(a+z\varepsilon)=g_2(a+z\varepsilon)$$

$$=N\left(\frac{z\varepsilon}{a+z\varepsilon-b}\right)=N(z)N(\varepsilon)N(a+z\varepsilon-b)^{-1}.$$

这就把 h_0 表示成了三个映射的乘积，因此 $\deg h_0$ 是它们的映射度的和。第一个是恒同映射，它的映射度是1。第二个是常值映射，它的映射度是0。第三个，对于充分小的 ε，它只在 $N(a-b)^{-1}$ 的邻域中取值，因此，据引理6.1的推论，它是零伦的。总之，我们得到了一个矛盾

$$\deg h_0=1\neq 0=\deg h_1,$$

这就证明了本定理。■

推论 设 K 是 C 的紧致子集，$H^1(K)=0$。则 $C-K$ 是连通的。特别地，当 K 同胚于 I 或 I^2 时，这是成立的。

这可由本定理直接得到。■

9.5定理 设 A、B 是 C 的紧致子集；a, b 是 $C-A-B$ 的两点。

如果A和B都不分离a和b并且$A\cap B$是连通的（或空集），则$A\cup B$也不分离a和b。

证明 在定理9.4中取$K=A\cup B$。则f确定了$H^1(K)$中的一个元素，如果这个元素是零，定理9.4表明$A\cup B$不能分离a和b。又因为A和B都不分离a和b，则f在A和B上的限制都是零伦的。

现在考虑Mayer-Vietoris序列（定理8.1）：

$$H^0(A\cap B)\xrightarrow{\delta^*}H^1(A\cup B)\longrightarrow H^1(A)\oplus H^1(B)。$$

上述映射在$H^1(A\cup B)$中代表的类是在这些同态中的第二个同态的核中，因此它也在第一个同态的象中。但如果$A\cap B$是空的，$H^0(A\cap B)$是零；如果$A\cap B$是连通的，则正如引理8.3中的证明那样，我们有$\delta^*=0$。因而无论在哪种情况，这个类在$H^1(A\cup B)$中为零，从而定理得证。■

在第13章的Jordan曲线定理的其它证明之一中，将要用到定理9.5。如果$A\cap B$容许有两个分支，这个结论可能不成立：例如，如果A和B分别是S^1的上半圆和下半圆。然而，对于它的一个有效的推广，可参阅练习14.12。

进一步的发展

在下一章中上面的结果将以某种方式加以推广。也可以推广到高维的情况：R^n的紧致子集K不能分离它的余集的两个点当且仅当一个适当定义的映射$K\longrightarrow S^{n-1}$是零伦的。对于这方面的情况，例如可参阅Hurewicz和Wallman的著作。

Hurewicz, Witold and Henry Wollman, 《Dimension Theory》, Princeton University Press, 1941.

练习和问题

1. 证明：对于C的任意的闭子集K，引理9.1和9.2都是成立的。
2. 举例证明，如果K是闭集但是无界的，引理9.3和定理9.4可能是不正确的。又如果K是有界的但不是闭集，定理9.4可能也是不正确的。
3. Eilenberg判别准则是否蕴涵着如果K同胚于S^1，它仍分离C？
4. 如果把定理9.4应用于C的下列子空间，可能（如果有的话）引出什么结论？

   a) [0， 1 [；*b*) S^1；*c*) y轴；

   d) $x=0$，$y\geqslant 0$；*e*) 定理3.6中的空间X；

   f) 练习7.3中的空间X。
5. 设S是R^n中闭的且l，p，c的子集。证明对于S的紧致子集K引理9.2成立。因而K和$S-K$的有界分支的并是紧致的。
6. 设$K=K_0\cup PQ$，其中K_0是紧致的并且是$l.p.c$的，而直线段PQ只在它的两端点与K_0相交。设AB是$C-K_0$中的与PQ相交叉的直线段。证明K可分离A和B当且仅当可用K_0中的一条道路连结P和Q。〔提示：应用定理8.4和9.4。〕

第10章 对偶映射

导言

遵循代数拓扑学的通常程序，我们将通过把一些代数方法加到几何中借以推广 Eilenberg 判别准则。然后，使在本质上相同的几何概念提供一个较强的结果，并且引导去猜测一个更深入的结果，这个结果将在第11章中建立。

判别准则（定理9.4）与下列两个概念有关联：

在$C-K$中道路连通，我们已经由此（在第 4 章中）建立了集合$\pi_0(C-K)$和群$H_0(C-K)$。

映射$K\to S^1$的同伦，我们已经（在第 5 章中）运用它定义了群$H^1(K)$。因而最终可以指望$H_0(C-K)$和$H^1(K)$之间有某种关系。通过详细的推演，结果将表明，它们可成为同构。事实上，我们可以把定理9.4的结论复述为

在$\pi_0(C-K)$中，$p(a)=p(b)$，

或等价地，

在$H_0(C-K)$中，$i(p(a))-i(p(b))=0$，

当且仅当

在$H^1(K)$中，$z\longrightarrow N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$定义 0 元素。

把这一点先记在心里，现在逐步构造一个映射，我们把它称为对偶映射。

对偶映射的构造

我们从定义

$$D_0: C-K \longrightarrow \mathrm{Map}(K,\ S^1)$$

为 $D_0(a)(z)=N(z-a)$, $z\in K$, $a\in C-K$

开始。

10.1引理　如果在$C-K$中$a\sim b$，则

$$D_0(a)\simeq D_0(b): K\to S^1.$$

证明　本质上，这与定理9.4的证明中的第一部分相同。如果 $p: I\to C-K$是连结a到b的一条道路，则 $D_0(p(t))$ 就是由$D_0(a)$到$D_0(b)$的一个同伦。■

推论　通过p对合成$q\circ D_0$作因子分解，得到交换图表

$$\begin{array}{ccc} C-K & \xrightarrow{D_0} & \mathrm{Map}(K,\ S^1) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \pi_0(C-K) & \xrightarrow{D_1} & H^1(K) \end{array}$$

实际上，该引理恰好说明了同伦类$q\circ D_0(a)$仅仅与$C-K$中a所在的分支有关。■

另外，我们已定义$H_0(C-K)=F(\pi_0(C-K))$。于是依据万有性质，存在唯一的同态

$$D_2: H_0(C-K)\longrightarrow H^1(K)$$

使得$D_1=D_2\circ i$。同态D_2是使我们感兴趣的同态之一。

首先通过道路连通分支和同伦类而后到达自由Abel群的过程是可调换的。把万有性质应用于D_0，得到一个同态

$$D_3: F(C-K)\longrightarrow \mathrm{Map}(K,\ S^1)$$

使得$D_3\circ i=D_0$。明显地，当注意到对于$F(C-K)$我们用的是加号而对于$\mathrm{Map}(K,\ S^1)$用的是乘号时，

$$D_3\Big(\sum_r n_r i(a_r)\Big)(z) = \prod_r (N(z-a_r))^{n_r}$$

$$= N\Big(\prod_r (z-a_r)^{n_r}\Big).$$

于是，特别地，

$$D_3(i(a)-i(b))(z) = N\Big(\frac{z-a}{z-b}\Big).$$

这表明了，所有上面这些是怎样从定理9.4中 f 的定义派生出来的。

我们可以把所有这些各种不同的定义之间的关系汇总成一个大的交换图表。为了避免混淆起见，我们把标准映射表示为

$$i:(C-K)\longrightarrow F(C-K),\ i':\pi_0(C-K)\longrightarrow H_0(C-K).$$

10.2 引理 下列图表是交换的。

$$\begin{array}{ccccc}
(C-K) & & \xrightarrow{\quad D_0 \quad} & & \mathrm{Map}(K,S^1) \\
 & \searrow^{i} & & \nearrow_{D_3} & \\
\Big\downarrow p & & F(C-K) & & \Big\downarrow q \\
 & & \Big\downarrow F(p) & & \\
\pi_0(C-K) & & \xrightarrow{\quad D_1 \quad} & & H^1(K) \\
 & \searrow^{i'} & & \nearrow_{D_2} & \\
 & & H_0(C-K) & &
\end{array}$$

证明 这个图表画成了立在其底上的一个三棱柱体，并且我们将用几何的术语来称呼它。我们必须证明它的五个面中的每一个都代表一个交换图表。

据D_3的定义，上面的三角形是交换的；据D_2的定义，下面的三角形也是交换的。据D_1的定义，背面矩形是交换的；据命题2.8中的$F(p)$的定义左前面的矩形是交换的。剩下只要考虑右前

面的矩形即可．但据已作的一些注释，

$$q\circ D_3\circ i=q\circ D_0=D_1\circ p=D_2\circ i'\circ p=D_2\circ F(p)\circ i;$$

又因为$q\circ D_3$和$D_2\circ F(p)$是同态，由 i 的万有性质蕴涵着它们是相等的．■

内射性的证明

用本节的记号，定理9.4说明：设a，$b\in C-K$定义了

$$x=i'(p(a))-i'(p(b))\in H_0(C-K).$$

则如果$D_2(x)=0$，就有 $x=0$．这是表明 D_2 为内射这方面的部分结果．然而D_2不完全是内射．

10.3引理 设$K\subset C$是紧致的，U是$C-K$的无界分支，则$D_1(U)=0$．

证明 假定（正如在引理9.3中那样）对于所有 $z\in K$，$|z|\leqslant R$，则$2R\in U$，并对于所有$z\in K$，

$$D_0(2R)(z)=N(z-2R)$$

有负的实部．据引理 6.1 的推论，$D_0(2R)$是零伦的，那就是$D_1(U)=0$．■

我们看到，$H_0(C-K)$对于我们的需要来说是太大了一点．我们用下列方法把它缩减到一定大小．设X是任意非空的空间，$\{0\}$是恰有一点的空间，$t:X\to\{0\}$是唯一的映射．今$\pi_0(\{0\})$恰有一个元素．故存在同构$u:H_0(\{0\})\longrightarrow Z$．因为 t 有一个右逆，所以$t_*:H_0(X)\longrightarrow H_0(\{0\})$ 也有，并且它是到上的；事实上，对于任意的$x\in X$，

$$u(t_*(i'(p(x))))=1.$$

定义$\widetilde{H}_0(X)$是 t_*的核．于是对于给定的X的道路连通分支的有限集$\{A_j\}$和整数的有限集$\{n_j\}$，$\Sigma n_j i(A_j)\in H_0(X)$属于$\widetilde{H}_0(X)$当

且仅当$\Sigma n_j = 0$

我们把D_2的限制表示为

$$D:\widetilde{H}_0(C-K)\longrightarrow H^1(K)。$$

平面上的 Alexander 对偶定理是说D是一个同构。我们现在证明这个论断的一半，而把余下的一半留到第11章中去证明。

10.4定理 对于C的任意紧致子集K，D是内射。

证明 正如已经指望的那样，这个证明基于定理 9.4。设

$$y=\sum_{j=1}^{r}n_j i'(A_j)\in H_0(C-K)$$

（其中所有A_j都不相同）满足$D(y)=0$。我们将证明$A_j\neq U$蕴涵着$n_j=0$，这样至多某一个n_j不为零。但如果又$y\in\widetilde{H}_0(C-K)$，就有$\Sigma n_j=0$，这样，所有的n_j都为零，因而$y=0$。

对于$1\leqslant j\leqslant r$选取$a_j\in A_j$。则$y=F(p)(x)$，其中

$$x=\sum_{j=1}^{r}n_j i(a_j)\in F(C-K)。$$

因为当

$$0=D(y)=D(F(p)(x))=q(D_3(x))$$

时，$D_3(x)$是零伦的。因此我们可以应用命题7.6的推论，把$D_3(x)$扩张成一个连续映射$g_1:C-A_j\longrightarrow S^1$，还可以假定它是零伦的。正如定理9.4的证明中那样，如果用$D_3(x)$定义一个映射

$$g_2:K\cup A_j-\{a_j\}\longrightarrow S^1,$$

可把它们组合在一起得到一个连续映射$F:C-\{a_j\}\longrightarrow S^1$。仍如前边那样定义

$$h_t(z)=F(a_j+z(\varepsilon+tR)),$$

并注意到，因为A_j是有界的，倘若R足够大，h_1就是零伦的，因此$\deg h_0=\deg h_1=0$；并且进一步，如果ε足够小，则对于$z\in S^1$，

$$h_0(z) = D_3(x)(a_j + ze)_{\circ}$$

因为$x = \Sigma n_k l(a_k)$以及D_3和deg都是同态，由此得到

$$0 = \deg h_0 = \Sigma n_k d_k,$$

其中d_k是映射$f_k: S^1 \longrightarrow S^1$的映射度，而

$$f_k(z) = N(a_j + ze - a_k)_{\circ}$$

但正如在定理9.4中那样，我们看到：对于$k \neq j$，$d_k = 0$，同时如果$k = j$，

$$f_j(z) = N(ze) = N(z)N(e)_{\circ}$$

故$d_j = 1$。因而最终

$$0 = \Sigma n_k d_k = n_j,$$

如所断言。■

为了说明定理10.4确实比定理9.4强这一点，我们由此可推出一个结果，然而它却不能由定理9.4直接得到。

推论 设K同伦等价于圆，则$C - K$至多有两个分支。

证明 我们有$H^1(K) \cong H^1(S^1) \cong Z$。则$\tilde{H}_0(C - K)$同构于这个群的一个子群，因此，它或者是平凡的，或者是无限循环群。所以，$C - K$有一个或两个道路连通分支。■

进一步的发展

前述的这个结果仅仅是著名的 Alexander 对偶定理在平面中的情况。一般的情况是：对于 R^n 的一个紧致子集K，有对偶同构

$$D_*: H_r(R^n - K) \longrightarrow H^{n-r-1}(K)$$

（如果$r = 0$或$n - 1$，稍作变更，就是上面的结果）。有关它的一些证明可在Alexandroff和Hopf, Lefschetz, Maunder, Pontrjagin, Spanier 的著作中找到。这些证明与我们将给出的证明没有什么

紧密联系。

有一个更一般的结果，其中R^n用局部同胚于R^n的空间（一个n维流形）所代替：这就是Poincaré对偶定理。对于它的证明可以参阅相同的参考书。

Alexandroff，P. and H. Hopf，《Topology I》. Springer，Berlin，1935。

Lefschetz，Solomon. 《Introduction to Topology》，Princeton University Press，1949。

Maunder，C. R. F.，《Algebraic Topology》，Van Nostrand，Princeton，1970。

Pontrjagin，L. S.，《Foundations of Combinatorial Topology》(English translation)，Graylock，1952。（有中译本，《组合拓扑学基础》，冯康译，中国科学院出版，1954年）。

Spanier，E. H.，《Algebraic Topology》，McGraw-Hill，New York，1966。

练习和问题

1. 考虑一个有六个群和九个同态的图表，它组成一个如引理10.2中的三棱柱体。对于柱体的哪些面A下述论断成立："除了A外，若所有其它的面都是交换的，则A也是交换的"？如果这个论断对于A不成立，给出一个额外的假设（例如，某映射的到上性或内射性），使得在此假设下成立。

2. 设$K\subset L$都是C的紧致子集，D_K和D_L是相应的对偶映射。证明图表

$$\begin{array}{ccc}\tilde{H}_0(C-L) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(C-K)\\ \downarrow D_L & & \downarrow D_K\\ H^1(L) & \longrightarrow & H^1(K)\end{array}$$

（其中水平的映射由包含映射诱导）是交换的。

3. 一条θ曲线是与一个圆及其一条直径的并集同胚的空间。运用定理

10.4证明一条θ曲线把$\mathbf{C}$至多分成三个分支。假定Jordan 曲线定理成立，证明分支数必正好是 3 。对于两条 Jordom曲线的分离并集，试得出相同的一些结果。

4. 设C是一个圆，$x \in F(\mathbf{C}-C)$。证明 D_3 (x) 在C上的映射度是 x 在C内的点的个数（以重数计算个数）。

5. 详细证明：如果V是R^n 中的连通的开子集，$n \geqslant 2$并且 $x \in V$，则 $V-\{x\}$是连通的。当$n=1$时，这个论证哪儿失效？

6. D_3的核是什么？

7. 采用定理10.4证明中的记号，命$h(z)=(z-a_j)^{-1}$，$h(K)=L$，并且U是$\mathbf{C}-L$的无界分支。证明存在一个连续映射$M:\mathbf{C} \to S^1$使得

$M(w)=D_3(x)(a_j+w^{-1})$，对于$w \in L \cup U$，

从而通过考虑M在中心为 0 半径相当大的一些圆上的映射度而得到定理10.4的另一个证明。

第11章　对偶定理的证明

导言

我们已经提及的对偶定理说的是对于C的紧致子集K，

$$D:\widetilde{H}_0(C-K)\longrightarrow H^1(K)$$

是一个同构，并且已经证明D是内射的。对于其到上性需要新的论证方法。我们面对的最明显的困难是集合K的任意性。例如，即使K同胚于圆，在平面上它也可能是非常弯曲的。处处连续但处处不可微的函数的存在（属于Weierstrass所给）表明了K在任意点处都可以没有切线。我们可以通过一个例子来说明这种可能性，正象Weierstrass所做的那样，这个例子是一个序列的极限，此序列的第n项又可用有限项来表示。“雪片曲线”是这样得到的，三等分一个等边三角形的各边，并且以中间线段为底边朝外建立新的等边三角形，反复实施上述步骤，所要求的曲线是这图形的外周界。图11.1表示的是这种构造法的第三步。

用这种构造法所留下的曲线图定义了一个相当复杂的紧致集合。另一个是与第3章一些反例有关的“夏威夷耳环”(图11.2)，其定义是一个套一个的相切的圆的序列的并集，这些圆的直径趋向于零。最后，图11.3的“Wada湖”描绘的是这样一个图形：它是由一个闭的圆盘（陆地）和三个开的子盘（湖泊）并依次用沟渠来扩大这些湖泊，使得在第n步号码为n(modulo 3)的湖到陆地上每个余留下来的点的距离不超过$1/n$。当$n\to\infty$时，陆地的极限给出另一个具有不太令人愉快的性质的紧致集合。

不要期望我们能够详细地研究所有这样一些空间的性态。因

此，在我们证明中必须用某种较简单的空间有效地代替K。这将涉及到一些逼近的技巧。

在我们的情况下是一些较简单的已经准备就绪的空间。我们使用$C—K$的总都是点的有限集，这样的一个点集确定$H_0(C—K)$的一个元素。我们不能把K扩大到除这些点集以外的整个的C，

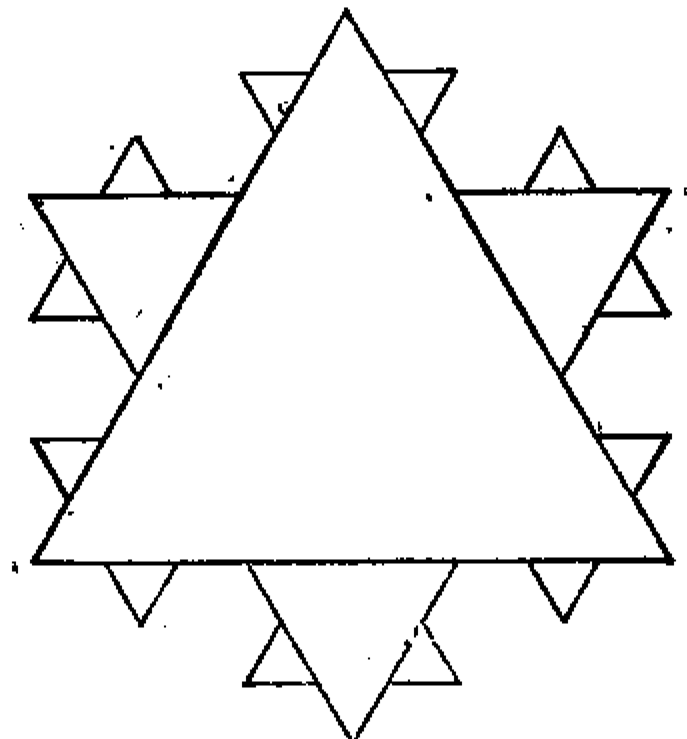


图 11.1

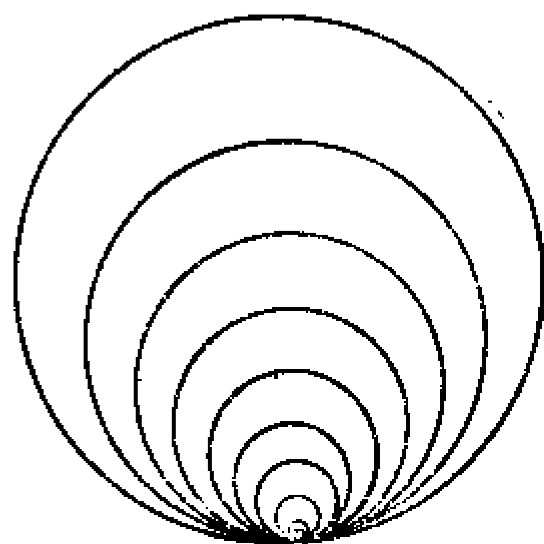


图 11.2

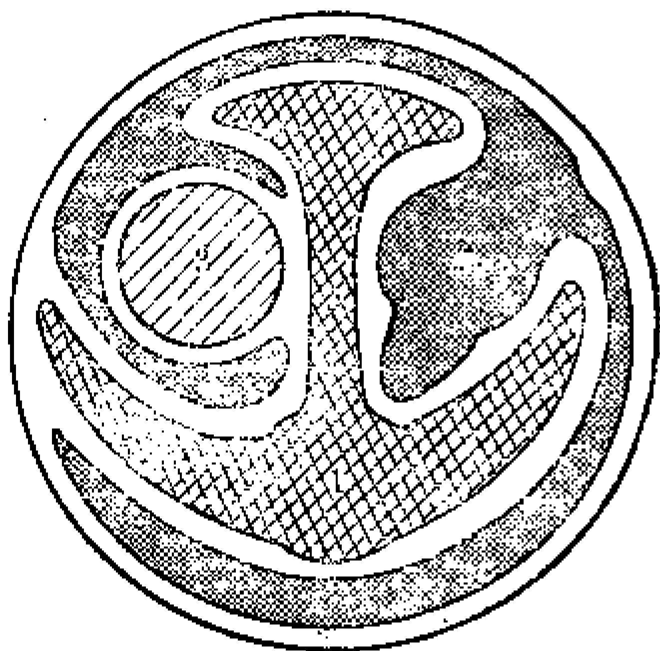


图 11.3

因为这将不是紧致的。代替这个，我们以在一个把K和这些点包含在内部的大圆盘上，挖掉中心在这些点的小开圆盘而得到的L。L是紧致的，包含K，并且在它的余集里仍有有关的点。因此，这个想法就是把关于K的一些问题化成关于某个这样的L的问题。

扩张定理

在试图证明D是到上映射当中，我们可以假定在$H^1(K)$中给出一个由映射$f:K\to S^1$代表的（等价）类ϕ。上面的讨论启发了我们从对于某个适当的L，把f扩张成一个由$L\to S^1$的映射开始。事实上，这个扩张是这个证明的唯一困难部分。在平凡的情况下$\phi=0$，f是零伦的。因此据命题7.6的推论，它可扩张成一个连续的映射$C\to S^1$；反之，因为$H^1(C)=0$，如果这样一个扩张存在，我们有$\phi=0$。在一般情况下，我们有Tietze扩张定理(7.4)。分别地把这定理应用到f的实部和虚部(参阅练习 7.2)——这个应用是合理的，因为紧致集合K在C中是闭集——故我们有f的连续扩张$g:C\to C$。现在如果0不在g的象中，$N\circ g:C\to S^1$是f的一个扩张，因而还是属于上面讨论过的平凡情况。一般，我们可以记$X=g^{-1}(\{0\})$，则

$$N\circ(g|C-X):C-X\to S^1$$

也是f的一个扩张。于是，如果X是有限的，通过把C限制到一个适当大的圆盘，并去掉围绕X的那些点（但与K相离）的小圆盘，我们就得到所要求的种类的一个扩张。因此下面就证明

11.1定理　设$K\subset C$是紧致的并且$f:K\to C-\{0\}$是连续的，则存在f的一个连续的扩张$g:C\to C$，使$g^{-1}(\{0\})$是有限的。

证明　据定理7.4，确实可以把f扩张成一个连续映射$g_1:C\to C$。现在我们希望改进g_1以达到要求的结果。在拓扑学中对于改

进映射的两项最好的创造性的技巧是用某种映射去逼近它们，而这种映射在把定义域进行某种细分后的每个集合上或者是可微分的或者是线性的.这里我们既不关心映射 g 是哪一类，甚至也不关心它是否能逼近 g_1；达到该定理的最快的捷径似乎是应用细分的这种想法而不是更多的别的。

首先，我们处理C的非紧致性．设K被包含在 $|z|\leqslant r$内；把由 $|z|\geqslant 2r$确定的集合记为 F．则由$f_1|K=f, f_1(F)=\{1\}$定义的映射 $f_1:K\cup F\to C$ 是连续的并且 $K\cup F$在C中是闭集；据 Tietze 定理，f_1可扩张成为一个连续映射$g_2:C\to C$。

因为g_2是连续的，$X=g_2^{-1}(\{0\})$是闭集；又因为 g_2 是 f_1的一个扩张，X与F不相交，故X是有界的．同时，X与 K 也不相交．则据定理1.12存在一个数$\delta>0$使得对于所有 $z\in K$，$w\in X$，

$$d(z,w)>2\delta.$$

把集合 $|x|\leqslant 2r$，$|y|\leqslant 2r$ 用平行于坐标轴的直线分成一些边长$\leqslant\delta$ 的矩形．则没有一个矩形可以既与K相交又与X相交（图11.4）．

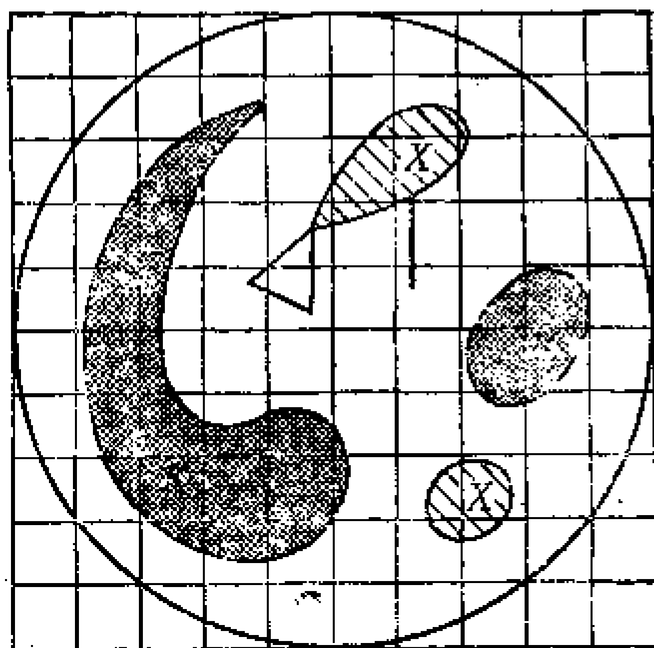


图 11.4

在大正方形的外面以及在不与X相交的每个矩形，棱或角顶上取$g=g_2$。我们刚才已注意到这些矩形的并集包含K，因此，这就保证g扩张了f．对属于X的每个角顶 P 定义 $g(P)=1$。对于与X相交的每条棱PQ（或许交于一些内点，或许可能只交于一个端点），在$C-\{0\}$中已经定义了$g(P)$和$g(Q)$．因为 $C-\{0\}$

是道路连通的，我们可用一条道路 $\gamma: I\to C-\{0\}$ 连结这些值。在棱PQ上定义 g 为

$$g((1-t)P+tQ)=\gamma(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1。$$

剩下的是只在与X相交的有限多个矩形上定义g。我们这样来做，使得 g 在每个这样的矩形上连续，并且 $g^{-1}(\{0\})$只包含该矩形的中心。则 $g^{-1}(\{0\})$ 将是有限的，并据定理1.7由归纳法可以证明 g 是连续的。于是该定理可由下面的引理得到。

11.2引理 设R是C中的矩形；它的四条边的并集记作∂R。则任意连续映射f: $\partial R\to C-\{0\}$有一个连续的扩张$g: C\to C$，使得$g^{-1}(\{0\})$仅由该矩形的中心构成。

证明 设 z_0 是R的中心（图11.5）。$R-\{z_0\}$ 的每个点位于由z_0发出的唯一的一条射线上，它与∂R恰交于一点，因此它可唯一地表示为

$$z_0+\lambda(z-z_0),\quad 0<\lambda\leqslant 1,\quad z\in\partial R。$$

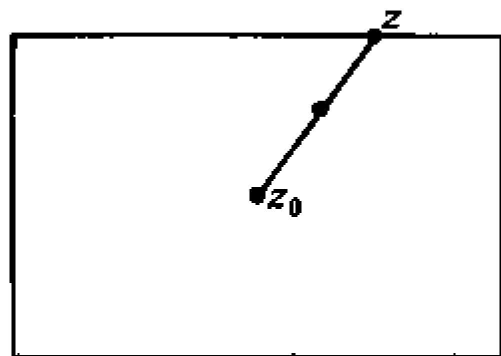


图 11.5

现在定义 g 为

$$g(z_0+\lambda(z-z_0))=\lambda f(z),\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, z\in\partial R。$$

在z_0处，$\lambda=0$，z 不是完全确定的，但对于所有$z\in\partial R$（等式）右边为0；反之，因为f的值域在$C-\{0\}$内，因而仅对于$\lambda=0$时，也即仅在z_0处右边的值为0。显然，g 扩张了 f（取$\lambda=1$）。

剩下的是证明 g 是连续的。在R的异于z_0的点P，λ和z连

续地依赖于P，因此$g(P)=\lambda f(z)$亦然。因为∂R是紧致的，$f(\partial R)$是有界的，比如说其界为K。于是如果$2a$是R的较短的边长，并且$|P-z_0|<a\varepsilon/K$，则参数λ（对于P）小于，ε/K，因此$|g(P)|<\varepsilon$，这证明了g在z_0处的连续性。■

自然性质

下面的简单结果叙述了对于$\mathbf{C}$的不同子集的对偶映射的联系。

11.3引理 设K，L是$\mathbf{C}$的（紧致）子集，使$K\subset L$，以i_1：$K\subset L$和i_2:$\mathbf{C}-L\subset\mathbf{C}-K$表示包含映射．则下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}-L & \xrightarrow{i_2} & \mathbf{C}-K \\
\downarrow D_0^L & & \downarrow D_0^K \\
\mathrm{Map}(L,S^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{Map}(K,S^1)
\end{array}$$

证明 首先注意

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}-L & \xrightarrow{i_2} & \mathbf{C}-K \\
\downarrow D_0^L & & \downarrow D_0^K \\
\mathrm{Map}(L,S^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{Map}(K,S^1)
\end{array}$$

是交换的；实际上，对于$a\in\mathbf{C}-L$和$z\in K$有

$$D_0^K(i_2(a))(z)=D_0^K(a)(z)=N(z-a)=D_0^L(a)(z).$$

通过运用万有性质可以看到，具有$F(\mathbf{C}-L)$和D_3的相应的图表是交换的．最后，过渡到同伦类可得到要证明的结果．■

对于一些特殊情况的证明

首先假定K是一个圆$|z-z_0|=r_0$。则$\mathbf{C}-K$恰有两个分支：

B（有界的），$|z-z_0|<r_0$，

U（无界的），$|z-z_0|>r_0$

（正如前面已经看到的，它们二者都是开集并且是道路连通的），这就可以计算$\widetilde{H}_0(C-K)$。注意到存在同胚$h: S^1 \longrightarrow K$，其定义为

$$h(z)=z_0+r_0 z.$$

我们可以以此来计算$H^1(K)$ 因为h是一个同胚，$h^*: H^1(K) \longrightarrow H^1(S^1)$是一个同构；又因为$\deg: H^1(S^1) \longrightarrow Z$是一个同构，故$d_0=\deg \circ h^*$也是同构。我们也把$f: K \longrightarrow S^1$记作$d_0(f)$。

现在来计算D_1。根据上述，更明确些，是计算$d_0 \circ D_1$。据引理10.3$D_1(U)=0$。但$B=p(z_0)$，故

$$\begin{aligned} d_0(D_1(B)) &= d_0(D_1(p(z_0)))=d_0(D_0(z_0)) \\ &= \deg(D_0(z_0)\circ h) \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} D_0(z_0)(h(z)) &= D_0(z_0)(z_0+r_0 z) \\ &= N(r_0 z) \\ &= z, \end{aligned}$$

因此这映射是恒同映射，它的映射度是1。$\widetilde{H}_0(C-K)$的元素是$mi'(B)+ni'(U)$，其中$m+n=0$，那就是说$n=-m$；又根据上述，$d_0 \circ D_1$把它映射到$m \in Z$。于是我们得到一个双射，从而也是一个同构。

在下面的情况中我们要使用这些，而那种情况是我们以后将要用到的。

设Δ_0是C中的圆盘$|z-z_0| \leqslant r_0$，并假定由$|z-z_i| \leqslant r_i (1 \leqslant i \leqslant k)$给定的圆盘$\Delta_i$是相离的，而且都在$\Delta_0$的内部。这可解析地表示为

$$\begin{aligned} &|z_i-z_0|<r_0-r_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ &|z_i-z_j|>r_i+r_j, \quad 1 \leqslant i<j \leqslant k. \end{aligned}$$

设X是由Δ_0挖掉所有圆盘Δ_i的内部后而得到的空间，于是X的

定义是

$$|z-z_0|\leqslant r_0,\quad |z-z_i|\geqslant r_i,\quad 1\leqslant i\leqslant k$$

(图11.6).把圆$|z-z_i|=r_i(0\leqslant i\leqslant k)$记作$\Gamma_i$,而把$\Gamma_i(1\leqslant i\leqslant k)$的并集记作$Y$；设$j:Y\subset X$.

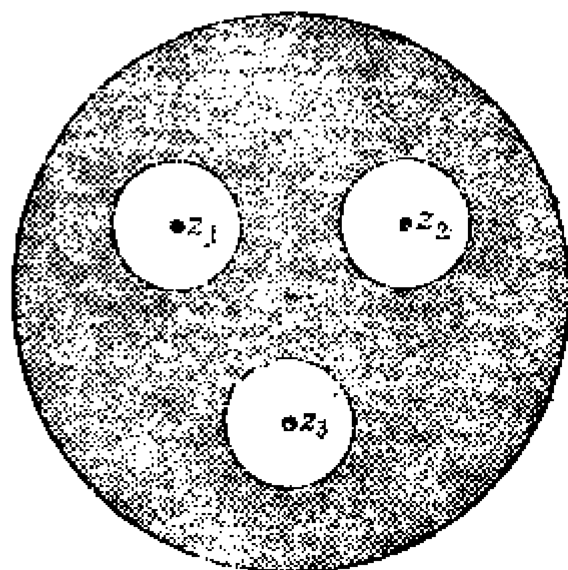


图 11.6

11.4引理 $j^*:H^1(X)\longrightarrow H^1(Y)$是一个内射.

证明　设$f:X\longrightarrow S^1$使得$f|Y$是零伦的. 则对于每个$i(1\leqslant i\leqslant k)$,$f|\Gamma_i$是零伦的. 据命题7.6的推论,它可以扩张成连续映射$_i:\triangle_i\longrightarrow S^1$. 如果定义$F:\Delta_0\longrightarrow S^1$为$F|X=f$, $F|\Delta_i=g_i(1\leqslant i\leqslant k)$, 据定理1.7 F是连续的.

但Δ_0是凸集,因而是可缩的. 所以F是零伦的. 据引理5.2$f^1=F|X$也是零伦的. 于是j^*有零核. 据引理2.1, j^*是内射. ■

11.5命题 $j^*\circ D:\widetilde{H}_0(C-X)\longrightarrow H^1(Y)$是一个同构.

注意, 由它可得D是一个同构, 即对偶定理对于X成立. 因为如果$D(x)=0$, 则$j^*(D(x))=0$; 又因为$j^*\circ D$是内射, $x=0$. 所以D是内射.另一方面,如果$y\in H^1(X)$,则因为$j^*\circ D$是到上的映射, 存在$z\in\widetilde{H}_0(C-X)$, 使$j^*(D(z))=j^*(y)$.因为j^*是内射, 故

得到$y=D(z)$。于是D是到上的。

证明　正象上述（K是一个圆）的情况一样，显然$C-X$有分支$E=C-\Delta_0$和$\mathrm{Int}\Delta_i(1\leqslant i\leqslant k)$。则$H_0(C-X)=F(\pi_0(C-X))$的任意元素可以唯一地表示成

$$n_0 i'(C-\Delta_0)+\sum_{j=1}^{k} n_j i'(\mathrm{Int}\Delta_j).$$

它属于$\widetilde{H}_0(C-X)$当且仅当

$$n_0+\sum_{j=1}^{k} n_j=0,$$

这就是说，

$$n_0=-\sum_{j=1}^{k} n_j;$$

故我们可以把$n_j(1\leqslant j\leqslant k)$看作是相互无关的整数，而$n_0$由它们所确定。

今据引理8.2，$H^1(Y)$是$H^1(\Gamma_j)(1\leqslant j\leqslant k)$的直和并且如前面的例子中那样，运用由

$$h_j(z)=z_j+r_j z$$

给定的同胚$h_j:S^1\longrightarrow\Gamma_j$，可以定义一个同构$d_j=\deg\circ h_j^*:H^1(\Gamma_j)\longrightarrow Z$。于是$H^1(Y)$的元素双方一一地对应于整数序列$(d_1,\cdots,d_k)$。

剩下的是计算映射D。为此，只要确定数

$$d_j(D_2(n_0 i'(C-\Delta_0)+\sum_{j=1}^{k} n_j i'(\mathrm{Int}\Delta_j)))$$

就足够了。

考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
H_0(C-X) & \longrightarrow & H_0(C-\Gamma_j) & & \\
\downarrow D_2(K) & & \downarrow D_2(\Gamma_j) & & \\
H^1(X)\xrightarrow{i^*}H^1(Y) & \longrightarrow & H^1(\Gamma_j) & \xrightarrow{d_j} & Z
\end{array}$$

据引理11.3，它是交换的。但前面我们已计算过$D_2(\Gamma_j)$，并且$\mathrm{Int}\Delta_j$（对应于前面的B）是$C-\Gamma_j(1\leqslant j\leqslant k)$的有界的分支，于是$a_j$是$\mathrm{Int}\Delta_j$的系数，因此$a_j=n_j$。现在由前面对于$\widetilde{H}_0(C-X)$和$H^1(Y)$的论述得到$j^*\circ D$是双射。■

证明的完成

回顾一下结果的叙述。

11.6定理　如果K是C的紧致子集，则映射

$$D:\widetilde{H}_0(C-K)\longrightarrow H^1(K)$$

是一个同构。

证明　在定理10.4中我们已看到D是内射；现在必须证明它是到上的。设$\phi\in H^1(K)$；用映射$f:K\longrightarrow S^1$来代表ϕ。据定理11.1，我们可以把f扩张成映射$g:C\longrightarrow C$使得$g^{-1}(0)$是有限的。命$z_0=0$并把r_0选取得如此之大使得$K\subset U(0,r_0)$；设z_1，…，z_t是$g^{-1}(0)$在$U(0,r_0)$中的所有的点，并把数r_i选取得如此之小使得$U(z_i,r_i)\subset C-K$；于是，如果X如前面所定义，$K\subset X$。现在$g|X$的象在$C-\{0\}$中，故$N\circ(g|X):X\longrightarrow S^1$也是$f$的扩张。因而，在引理11.3的交换图表

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{H}_0(C-X) & \xleftarrow{i_{2*}} & \widetilde{H}_0(C-K)\\ \Big\downarrow D^X & & \Big\downarrow D^K\\ H^1(X) & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(K)\end{array}$$

中，ϕ在i_1^*的象内。但按照命题11.5，该定理对于X是成立的，所以D^X是到上的映射，故ϕ在

$$i_1^*\circ D^X=D^K\circ i_{2*}$$

的象内，从而也就在D^K的象内。但ϕ是任意的，所以D^K确实是到上的。这就完成了定理的证明。■

现在，Jordan曲线定理是一个直接的推论。

11.7定理　设$K\subset C$同胚于S^1。则$C-K$恰有两个道路连通分支。

因为K同胚于S^1，它是紧致的，故可应用定理11.6。因此

$$\widetilde{H}_0(C-K)\cong \check{H}^1(K)\cong \check{H}^1(S^1)\cong \mathbf{Z},$$

而

$$H_0(C-K)\cong \widetilde{H}_0(C-K)\oplus \mathbf{Z}\cong \mathbf{Z}\oplus \mathbf{Z}$$

的秩为 2。所以$C-K$有两个道路连通分支，如所断言。■

进一步的发展

我们已经提及推广到高维的问题。正如前面所描述的那样，这个证明的关键想法是用某种"足够靠近"和"相当规矩"的对象来代替一个任意的紧致集合K.第二项要求有两种标准的解释：可以寻找一个子集，它或者是多面体或者是可微分的（我们已用过的是第二项，不过这种抉择纯系体会方面的问题）。可以证明，如果U是包含K的任意开集，则存在紧致集合L，$K\subset L\subset U$使得L是多面体，以及类似的可微分的L。关于这些论断的证明，可参阅 Stallings 或Hudson,以及Conner和Floyd或 Stong的书。

Conner.P.E.and E.E.Floyd，《Differentiable Perodic Maps》，Springer,Berlin,1964.

Hudson，J. F. P.，《Piecewise Linear Topology》，Benamin,New York，1969.

Stallings,J.R.,《Lectures on Polyhedral Topology》，Tata Institute，1968.

Stong，R.E.,《Notes on Cobordism Theory》，Princeton University Press，1968.

练习和问题

1. 构造S^1上的恒同映射的一个扩张$g:D^2\to\boldsymbol{C}$使得$g^{-1}(\{0\})$不是有限的。
2. 设$g:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$是$f:K\to S^1$的扩张（$K\subset\boldsymbol{C}$是紧致的），并假定$f$同伦于$f'$。证明存在$f'$的一个扩张$g':\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$使$g'^{-1}(\{0\})=g^{-1}(\{0\})$.〔提示：除了$K$的附近以外可选取$g'$等于$g$.〕
3. 设$L\subset\boldsymbol{C}$是具有α_0个顶点和α_1条棱的连通图，设$\boldsymbol{C}-L$有α_2个分支。证明Euler公式$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$
4. 证明：如果K_1和K_2是$\boldsymbol{C}$的紧致子集使得K_1分离$\boldsymbol{C}$，而K_2支配K_1，则K_2分离$\boldsymbol{C}$。
5. 证明：如果X如引理11.4中所示，并且$f:X\to S^1$在Γ_i $(0\leqslant i\leqslant k)$上的映射度为$d_i$，则

$$d_0=\sum_{i=1}^{I}d_i\ .$$

6. 证明：如果$K\subset D^2$是紧致的，并且$g:D^2\to\boldsymbol{C}$是一个映射使得$g(K)\subset\boldsymbol{C}-\{0\}$，那么可以找到这样一个映射$g':D^2\to\boldsymbol{C}$，在K上同$g$一致，$g'^{-1}(\{0\})$是有限的，并且对于所有的$z$，满足$|g'(z)-g(z)|<\varepsilon$，其中$\varepsilon>0$是任意给定的数。

〔提示：首先选取

$$\mu<\min\left(\frac{\varepsilon}{3},d(g(K),0)\right).$$

然后，用矩形将D^2分割得如此之细，使得没有一个与K和$g^{-1}(U_\eta(0))$相交并且对同一个矩形中的z_1和z_2有

$$|g(z_1)-g(z_2)|<\eta.$$

最后，再象对定理11.1那样进行论证。〕

7. 证明：在练习10.4中，如果C是任意一条Jordan曲线，该练习仍然是成立的；特别地，如果C分离P和Q，则对于由S^1到C上的任意同胚h，

$$D_3(i(P)-i(Q))\circ h$$

的映射度为±1。

8．设

$$A_i=(i,0,0),\ B_i=(0,\ i,\ 1),\ i=1,\ 2,\ 3$$

是$\boldsymbol{R}^3$中的点．又设G是九条线段A_iB_j $(i,j=1,2,3)$ 的并集．试列出包含在G中的所有 Jordan 曲线。再列出$H^1(G)$中所有这样的元素，它在这些曲线中每一条上的限制映射的映射度为$+1$，0或-1。

9．利用前面两个练习证明：在$\mathbf{C}$中不存在同胚于G的子空间。

10．对于在本章开始时描述过的一些紧致空间K，讨论群$H_0(\mathbf{C}-K)$ 和 $H^1(K)$。

第12章 关于证明的注释

导言

在前面三章中，曾试着用可能最简单的语言来描述对偶定理的证明，因为了解拓扑学中的一些基本结果，实际上并不依赖许多其它的数学科目。然而，如果我们更细密地考察一下它们的证明，就会发现它们同其它数学分支有着广泛的联系。这些使我们的构思和论证看起来似乎更加自然，并且洞察出为什么要这样来进行证明。

增广平面

我们首先要观察，通过添加一个额外的点可以更完善地把平面C封闭起来，或更确切地说，把平面C紧致化。这可如下来做。在R^3中取单位球面S^2并由北极（0,0,1）把它球极投射到赤道平面$x_3=0$上。我们可以把此平面（通过 $z=x_1+ix_2$）与C等同起来（图12.1）。除去在点（0，0，1） 本身以外，这个映射处处是完全确定的。它可以用坐标表示为

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3},$$

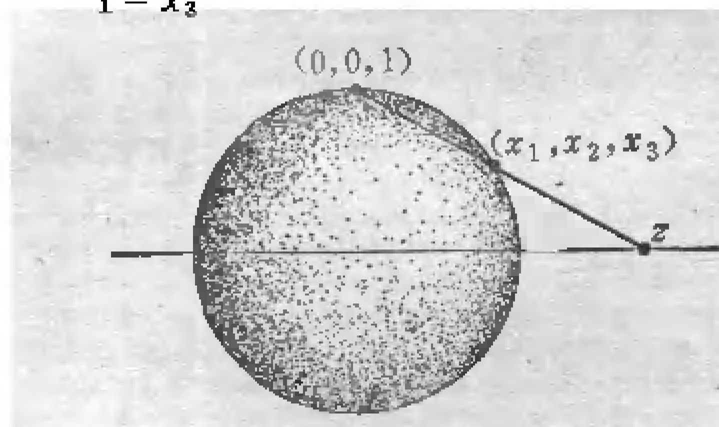


图 12.1

除去点（0，0，－1）以外，我们还有另一个表示式 $(1+x_3)/(x_1-ix_2)$。存在一个双方可逆的映射，比如说，它可以给定为

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{2\mathrm{Re}z}{|z|^2+1},\frac{2\mathrm{Im}z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)=e(z).$$

因这些映射中显然每一个都是连续的，所以在 C 和 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 之间已经构造了一个同胚 e。

可以把 S^2 认为是由 C 添加上这个点而得到的，由此，就可把 z 看作是 S^2 上的坐标，并规定 $z=\infty$ 是（0，0，1）的形式坐标。熟悉射影几何的读者可以看出，在 C（"复仿射线"）上的无穷远处添加一点的过程将得到一维的复射影空间；然而这里正在谈的是拓扑的而非射影的性质。

为了研究在 S^2 上关于这些复坐标的连续性，注意（依据上述）除去在（0，0，1）以外，z 是很好的坐标。现在 S^2 对于 x_1 轴的反射是一个同胚，用复坐标可表示为 $z\to z^{-1}$（借用熟知的约定 $\infty=0^{-1}$，$0=\infty^{-1}$）。于是对于研究增广平面在 ∞ 处的拓扑，z^{-1} 是一个合适的坐标。

现在可以看到，（例如，应用引理3.5(iii)）S^2 是 $l.p.c$ 的，所以对于以 S^2 代替的 C，引理9.1和9.2也可应用。（然而引理9.3不能应用，因为 S^2 只是紧致的，而不产生有界性的概念。）而且，C 和 S^2 的分离性本质上是相同的。因为如果 K 是 S^2 的子集，则或者 $K=S^2$，在这种情况下没什么事情可研究，或者存在点 $P\in S^2-K$，于是我们可以旋转 S^2 使 $P\longmapsto\infty$，并使 K 的象包含在 C 的象内。对于这种情况我们有

12.1引理 设 K 是 C 的紧致子集；以 B_α 表示 $C-K$ 的那些有界的分支，而以 U 表示无界的分支。则 $S^2-e(K)$ 的分支是 $e(B_\alpha)$

和$e(U)\cup\{\infty\}$。

证明 如同在引理9.3中那样，设K包含在$|z|\leqslant r$内，并定义E为$|z|>r$。则$e(E)\cup\{\infty\}$在S^2中是一个圆盘，因而是连通的；它也把∞包含在它的内部。因此$e(U)\cup\{\infty\}$，即相交的连通集合(U)和$e(E)\cup\{\infty\}$的并，是连通的。

现在要证明集$e(B_\alpha)$，$e(U)\cup\{\infty\}$中的每一个在S^2〔因此在$S^2-e(K)$〕中是开集。由此得到，它们就是$S^2-e(K)$的道路连通分支〔=分支〕。因为它们中的任意两个都是被某条缝缝所分离的，因此在$S^2-e(K)$中没有可以把它们中的两个连结起来的道路。

因为B_α，U在C中是开集，且$e(G)$在S^2中是开集，所以$e(B_\alpha)$和$e(U)$在S^2中是开集。但我们已看到∞是$e(U)\cup\{\infty\}$的一个内点，因此，$e(B_\alpha)$，$e(U)\cup\{\infty\}$在S^2中是开集。■

前几章的重述

在射影几何里经常使用齐次坐标(z_0,z_1)，其中使$z=z_0/z_1$是直线上的原来的坐标，并且$z=\infty$对应于$z_0=0$。我们必须约定z_0和z_1不能同时为零，且对于任意$\lambda\in C-\{0\}$，$(\lambda z_0,\lambda z_1)$与$(z_0,z_1)$表示同一个点。

现在考虑“双方线性”变换

$$\left.\begin{array}{l} z'_0=az_0+bz_1 \\ z'_1=cz_0+dz_1 \end{array}\right\}，满足\quad 0\neq\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc。$$

这是完全确定的并且是可逆的，导出的映射称为射影映射。用老的坐标，它可给定为

$$z\longmapsto z'=\frac{az+b}{cz+d}。$$

对我们来说，最根本的是考察它定义一个连续映射$S^2\longrightarrow S^2$。或许除去在$z=\infty$和$z=-d/c$（如果$c=0$它们重合）以外，它的连

续性是显然的，不过作代换 $w=z^{-1}$ 后，在那些点处连续性也成立．（所有）射影映射形成一个群，即射影群 $PGL_2(C)$，它是由作用在S^2上的一些同胚构成的。

12.2引理（射影几何基本定理） 这个群的运算是严格三重传递的。

换句话说，给定两个分别由三个不同的点构成的点组（P_1, P_2, P_3）和(Q_1, Q_2, Q_3)，则存在唯一的射影映射 f 使得$f(P_i)=Q_i$，$i=1,2,3$。

我们用不到这个结果．因此不详细地证明它．在（Q_1,Q_2, Q_3）$=(0,1,\infty)$的情况下，所要求的映射 （用非齐次坐标）可给定为

$$z \longmapsto (z,P_2;P_1,P_3)=\frac{(z-P_1)(P_2-P_3)}{(z-P_3)(P_2-P_1)}.$$

刚才定义的记号$(z,P_2;P_1,P_3)$叫做这四个点的交叉比．交叉比的概念在射影几何中所起的作用正象距离对之于Euclid 几何．特别地，此引理表明，我们可以要求把两个不同的点 a，b 映射到 0 和∞，如果 a，b 是有限的，这当然由

$$z \longmapsto \frac{z-a}{z-b}$$

即可达到．于是应用引理12.1，可以把Eilenberg 判别准则重述为：

12.3引理 设K是S^2的不包含 0 或∞的紧致子集．则K分离 0 和∞当且仅当$N\circ(e^{-1}|K):K\to S^1$是非零伦的．■

其次，考虑对偶映射的构造．第10章中的基本定义是

$$D_0(a)(z)=N(z-a),\ a\in C-K,\ z\in K.$$

用齐次坐标，这变成了$N(z_0a_1-z_1a_0)$，但它不是完全确定的．在

定理9.4中出现的表示式

$$N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

看来是更重要的；这里我们必须把它改写为

$$N\left(\frac{z_0a_1-z_1a_0}{z_0b_1-z_1b_0}\right),$$

甚至这还与 a 和 b 的齐次坐标的规范化有关。因此导致我们去考虑交叉比 $(z,w;a,b)$。因为我们不希望这个比对于 $z\in K, a\in S^2-K$ 为零，自然要取 $w\in K$ 和 $b\in S^2-K$ 并保持这些点固定不动；我们把它们叫做基点。现在∞已没有特殊的作用，定义 $D_0':S^2-K\to MaP(K,S^1)$ 为

$$D_0'(a)(z)=N(z,w;\ a,b).$$

另外的映射 $D_1', D_2' D_3'$ 的定义以及类比于引理10.2中的图表的构造现在可恰如在第10章中一样去做。特别地，

$$D_3'(\Sigma n_j i(a_j))(z)=N$$

$$\left(\prod_j\left\{\left(\frac{z_0a_{j1}-z_1a_{j0}}{z_0b_1-z_1b_0}\right)\left(\frac{w_0b_1-w_1b_0}{w_0a_{j1}-w_1a_{j0}}\right)\right\}^{n_j}\right)$$

$$=N\left(\prod_j\left(\frac{z_0a_{j1}-z_1a_{j0}}{w_0a_{j1}-w_1a_{j0}}\right)^{n_j}\left(\frac{w_0b_1-w_1b_0}{z_0b_1-z_1b_0}\right)^{\Sigma n_j}\right)$$

现在对应于 $\widetilde{H}_0(S^2-K)$ 的 $\Sigma n_j=0$ 的情况，上式可以简化使第二项消失。这样，此表示式与 b 无关。

虽然它仍旧与 w 有关，但这只多一个常数因子，不影响同伦类，致使

$$D':\widetilde{H}_0(S^2-K)\longrightarrow H^1(K)$$

既与基点的选取无关，也与 $C-K$ 无关，实质上它可用与 D 相同

的公式表示。

用这些定义，引理10.3可转换为考察D_2零化S^2-K中的包含基点b的分支，并且如果b取作∞，具有齐次坐标(0,1)，我们可重新获得第10章中那些公式而只差一个与w有关的常数因子。

定理10.4的证明也可简化，因为∞现在不起特殊作用。如果$D_3'(x)$在K上是零伦的，据命题7.6的推论，我们可以把它扩张到S^2-K的除去一个例外的所有分支A_j，以及扩张到A_j中除a_j以外的所有点并在其上与$D_3'(x)$相同。如果现在挖去一个具有边界C_j包围a_j的小圆盘D_j（内部），其余集是一个圆盘，因而是可缩的，故$D_3'(x)|C_j$是零伦的，它的映射度为0。通过其余方面如前的证明，我们发现映射度是$\pm n_j$（符号与由S^1到C_j的同胚的选取有关）。这个论证与后来不出现的例外点b有关，因而只与用$\widetilde{H}_0(S^2-K)$直接处理的事实有关。

用S^2代替C对第11章的影响比第10章的要小；确实，给定理11.1提供的证明表明，对于$e(C)$的紧致子集K，任意连续映射$f:K\to S^1$可扩张成连续映射$g:S^2\to C$使$g^{-1}(\{0\})$是有限的集合$z_1,\cdots,z_r$。现在不必提及D_0；简单地从S^2去掉包围z_j与K相离并且彼此也相离的圆盘D_j的内部。把剩下的部分叫做Y_r。则f可扩张为$h=N\circ(g|Y_r):Y_r\to S^1$，使得（比如说）它在$D_j$的边界圆$C_j$上的映射度为$n_j$，必然地（参看下面）$\Sigma n_j=0$，并且据引理11.3，现在实质上有$h\simeq D_3'(\Sigma n_j i(z_j))$。

注意$D_3'(\Sigma n_j i(z_j))=N(F)$，其中$F$是$S^2$上的一个有理函数，$a_j$为它的$n_j$重零点（如果$n_j<0$，这些实际上是极点）并且没有其它更多的零点（如果$\Sigma n_j=0$，就没有要考虑的基点$b$）。这个性质决定$F$只差乘上一个常数值。对于$S^2$上的有理函数（与$C$上相反）所有零（包括极）点的重数的和为0，这恰恰证明了上述的断言$\Sigma n_j=0$。这也是我们为什么把对偶映射由H_0限制到$\widetilde{H}_0$

的另一个理由。

Hopf映射

我们将通过再次详细地考察球面S^2上的复齐次坐标和通常的三维Euclid坐标之间的关系来结束这一章。齐次坐标可如下产生。射影线定义为在二维向量空间中通过原点的直线的集合。这里，向量空间取作C^2：每个异于（0,0）的点(z_0, z_1)位于通过原点的唯一的一条直线上；在这条直线上其它的非零的点为$(\lambda z_0, \lambda z_1)$其中$\lambda \in C-\{0\}$。因而射影空间中的一个点是$C^2$中的一条直线，并且用该直线上任意点的坐标$(z_0, z_1)$来代表。

拓扑学家（他宁愿喜欢考察紧致集合而非一般的）注意到C^2可以与R^4等同，因而它包含一个3维单位球面S^3，这个球面可给定为

$$|z_0|^2+|z_1|^2=1.$$

而且，通过原点的每条直线（以(z_0, z_1)代表）与这球面相交，例如交于$(\lambda z_0, \lambda z_1)$其中$\lambda=(|z_0|^2+|z_1|^2)^{-1/2}$。于是可以把齐次坐标限制为满足条件$|z_0|^2+|z_1|^2=1$，则它们确定了$S^3$上的一个点。然而这些不是通常意义下的坐标：它们的每个值给出S^2的唯一点，不过这个点的坐标却不唯一。换句话说，我们这样已经定义了一个函数$H: S^3 \to S^2$：下面用我们的坐标表示这个函数。S^3上具有$|z_0|^2+|z_1|^2=1$的点

$$(z_0, z_1) \in S^3 \subset C^2$$

变成S^2上具有这些齐次坐标，因而具有单一复数坐标$z=z_0/z_1$的点。前面我们已经看到，利用Euclid坐标有

$$\frac{z_0}{z_1}=z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=\frac{1+x_3}{x_1-ix_2},$$

而（应用$|z_0|^2+|z_1|^2=1$）解这方程可得到

$$x_1 + ix_2 = \frac{2z}{|z|^2+1} = 2z_0\bar{z}_1,$$

$$x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = |z_0|^2 - |z_1|^2.$$

由此得知H是一个连续映射。它是由 Hopf 首先建立的并且被命名为Hopf映射。

对于S^2上的每个点，齐次坐标(z_0, z_1)不是唯一的，因为它可以用$(\lambda z_0, \lambda z_1)$来代替，其中$\lambda$满足

$$1 = |\lambda z_0|^2 + |\lambda z_1|^2 = |\lambda|^2|z_0|^2 + |\lambda|^2|z_1|^2 = |\lambda|^2,$$

即，使得$\lambda \in S^1$。事实上，可以统一地描述这个不唯一性。记$S^2 - \{\infty\}$为C_1，$S^2 - \{0\}$为C_2并分别具有坐标 z 和$w = z^{-1}$。

12.4定理 对于每个$i = 1, 2$存在同胚

$$h_i : C_i \times S^1 \longrightarrow H^{-1}(C_i)$$

使得$H \circ h_i$是在第一个因子上的投射。

证明 我们简单地给出定义h_i的公式，而留给读者去验证所断言的性质：

$$h_1(z, e^{i\theta}) = \left(\frac{ze^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|z|^2}}\right),$$

并且，若记$w = z^{-1}$，有

$$h_2(w, e^{i\theta}) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{|w|^2+1}}, \frac{we^{i\theta}}{\sqrt{|w|^2+1}}\right).$$

注意，h_1和h_2在它们的定义域的交集上并不一致：第二个公式必须乘以 $N(z)$ 才得到第一个公式。所以我们并没有提供一个同胚$S^2 \times S^1 \longrightarrow S^3$。事实上也不存在这样的同胚，因为

$$H^1(S^2 \times S^1) \cong Z,\ H^1(S^3) = 0.$$

象H这样的一个"局部上"是乘积的投射的映射称为纤维丛投射，而象h_1，h_2这样的局部乘积映射则都称为它的图。

h_1和h_2的象是在S^3中分别删去了圆$z_2=0$和$z_1=0$。如果把S^3减去一个点球极投射地表示在R^3上，可以看出，这两个圆是简单地连结在一起的。对于S^2的任意两个不同的点的H^{-1}原象同样成立；在更深入地研究映射的拓扑学中这条性质是很重要的。

进一步的发展

对于有关纤维丛和 Hopf 映射的更进一步的内容，可参阅Steenrod的经典著作；或者，诸如Husemoller的书等。

Husemoller, Dale, 《Tibre Bundles》, McGraw-Hill, New York, 1966.

Steenrod, N.E., 《Topology of Fibre Bundles》, Princeton University Press, 1951.

练习和问题

1. 设a,b,c,d是不全为0的复数。写出由

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

定义的映射$S^2 \to S^2$是连续映射的证明。

2. 利用课文中给出的提示，写出引理12.2的一个完满的证明。
3. 设K是S^2的紧致子集；a,b是不在K中的不同的点；$h:S^2\to S^2$是射影映射，使得$a,b\to 0,\infty$。证明：$N\circ h:K\to S^1$的同伦类只与a和b有关而与h的选取无关。
4. 证明z的每个有理函数$f(z)$确定一个连续映射$\rho:S^2\to S^2$，并且$\rho(x)=a$的解的个数($\deg\rho$)（算上相应的重数）是与a无关的。证明$\rho(x)=x$的解的个数（真正地计算出的）是$1+\deg\rho$。

*5. 对于用齐次坐标定义的映射$S^{2n+1}\to P_n(C)$〔其中$P_n(C)$是n维复射影空间〕，证明类似于定理12.4的结果。

*6. 证明：对于实射影空间，相应的映射$S^n\to P_n(R)$是在练习6.9的意

叉下的覆迭映射，试推出恰存在映射 $S^1 \to P_2(\mathbf{R})$ 的两个同伦类。

7. 证明，由

$$f(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2,\sqrt{2}\,yz,\sqrt{2}\,zx,\sqrt{2}\,xy)$$

定义的映射$f:S^2\to\mathbf{R}^6$是 2 个值到1个值的映射，并推出f 确定到$P_2(\mathbf{R})$的一个嵌入。同时证明它的象位于一个 4 维球面中。

*8. 把S^3考虑作为单位四元数组的群。每个单位四元数 q 可由 $x\longmapsto x^q=q^{-1}xq$定义迹数为 0 的四元数的 3 维空间中的一个旋转。证明这诱导出由$P_3(\mathbf{R})$到SO_3上的一个同胚。

9. 用练习 7 中的方法构造$P_2(\mathbf{R})$在 Euclid 空间中的一个嵌入，不过要用象$x\bar{y}$这样的一些乘积。

第III部分

平面点集拓扑学中进一步的结果

第13章 Jordan曲线定理

导言

同胚于S^1的一个平面子集称为一条 Jordan曲线。 Camille Jordan 第一个阐述的这条 Jordan 曲线定理，事实上是由Veben在1905年首先正确地给予证明的。在引理11.4中我们已经指出这个结果可由一般的对偶定理得到。在本章中给出两个另外的证明。第一个是建立在 Eilenberg 判别准则基础上的，而第二个则完全不同。然后我们继续推导平面拓扑学中的一些经典定理。

Theta曲线

第一个证明的思路是把 Jordan 曲线分成两部分，然后考虑改变其中一部分所引起的效果。最后用一个圆或半圆代替该曲线，而对于圆或半圆结果则是显然的。第一个引理将表明这如何影响映射度。

设Θ是S^1与实数轴上的区间$[-1, 1]$的并。则Θ包含三条Jordan曲线：S^1本身，上方的U和下方的L（图 13.1）。同胚$e_1':S^1\longrightarrow U$和$e_2':S^1\longrightarrow L$分别给定为

$$e_1'(x+iy)=\begin{cases}x+iy, & x^2+y^2=1,\ y\geqslant 0,\\ x, & x^2+y^2=1,\ y\leqslant 0,\end{cases}$$

$$e_2'(x+iy)=\begin{cases}x, & x^2+y^2=1,\ y\geqslant 0;\\ x+iy, & x^2+y^2=1,\ y\leqslant 0.\end{cases}$$

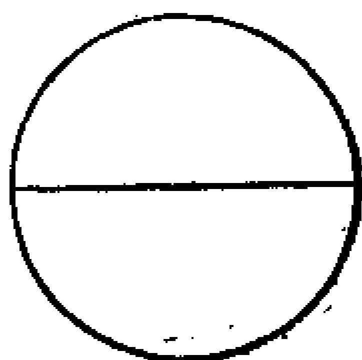


图13.1

记包含映射为 $e_0:S^1\longrightarrow\Theta$，而由$e_1'$，$e_2'$ 定义的映射分别记为 e_1，$e_2:S^1\longrightarrow\Theta$。

13.1引理　对于任意的$f:\Theta\longrightarrow S^1$，

$$\deg(f\circ e_0)=\deg(f\circ e_1)+\deg(f\circ e_2).$$

证明　设$g_0:I\longrightarrow R$ 是 $f\circ e_0\circ(e|I)$的提升，而设$h:[-1,1]\longrightarrow R$是$f|[-1,1]$的提升．因为

$$e(h(-1))=f(-1)=e\left(g_0\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

故可以选取提升 h 使$h(-1)=g_0\left(\frac{1}{2}\right)$。

现在对于$i=1,2$构造 $f\circ e_i\circ(e|I)$的提升g_i；它们可以直接给定为

$$g_1(t)=\begin{cases}g_0(t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ h(\cos 2\pi t), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}$$

$$g_2(t)=\begin{cases}h(\cos 2\pi t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ g_0(t), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\deg(f\circ e_0) &= g_0(1)-g_0(0)\\ &= g_0(1)-h(1)+h(1)-g_0(0)\\ &= g_2(1)-g_2(0)+g_1(1)-g_1(0)\\ &= \deg(f\circ e_2)+\deg(f\circ e_1). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

由此我们可推出下面的有用的结果.

13.2引理 设$F:\Theta\longrightarrow C$是一个嵌入，并设$a$，$b\in C-F(\Theta)$. 如果$F(S^1)$，$F(U)$和$F(L)$中有两个不分离$a$和$b$，则第三个也不分离$a$和$b$.

证明 考虑映射$f:\Theta\longrightarrow S^1$，其定义为

$$f(z)=N\left(\frac{F(z)-a}{F(z)-b}\right).$$

据 Eilenberg判别准则（定理9.4），$F(S^1)$不分离a和b当且仅当$f|S^1=f\circ e_0$是零伦的，也即仅当$\deg(f\circ e_0)=0$时；类似地，对于U和L亦如此。但是据引理13.1，如果这些映射度中有两个为0，则第三个也为0. $\blacksquare$

第一个另外的证明（依照 Dieudonné的证法）

我们已经注意到 Eilenberg 判别准则本身并不能阐明对于任意 Jordan曲线$J\subset C$，$C-J$至多有两个分支. 在我们的第一个证明中，这一点却可由下面的结果推出，而这结果本身也具有某种重要性.

13.3命题 如果$J\subset C$是一条 Jordan 曲线，则$C-J$的任意一个分支的边界都是J.

证明 设A是这样一个分支.据引理9.1和9.2，A在C中是开

集而$A\cup J$是闭集。因此$\mathrm{Fr}A\subset J$。

反之，对于任意的$x\in J$和任意的邻域$U(x,\varepsilon)$，我们可以找到一段开弧α使$x\in\alpha$并且$\alpha\subset J\cap U(x,\varepsilon)$。据定理9.4的推论，$C-(J-\alpha)$是道路连通的。因此，在$C-(J-\alpha)$中存在连结$A$的点$a$到$x$的道路。因为$A$是开集，将存在某个始点$y$，它在这道路上而不在$A$内。所以$y\in\mathrm{Fr}A\subset J$，这样$y\in\alpha$。于是$\mathrm{Fr}A$与$\alpha\subset U(x,\varepsilon)$相交；因为这对于所有$\varepsilon>0$都成立，并且$\mathrm{Fr}A$是闭集，据引理1.5的推论，得到$x\in\mathrm{Fr}A$。而这对所有$x\in J$都成立，因此$J\subset\mathrm{Fr}A$。∎

现在我们已经为Jordan曲线定理的第一个另外的证明做好了准备。

特殊情况 设J是C上包含一条直线段的Jordan曲线。设c位于这样一条（开）线段γ'上；又设$r<d(c,J-\gamma')$。以c为中心，r为半径画一个圆；以γ表示与γ'相交的直径，以α和β分别表示γ两侧的半圆，并以$\delta=J-\mathrm{Int}_J\gamma$表示$J$的剩余部分（图13.2）。

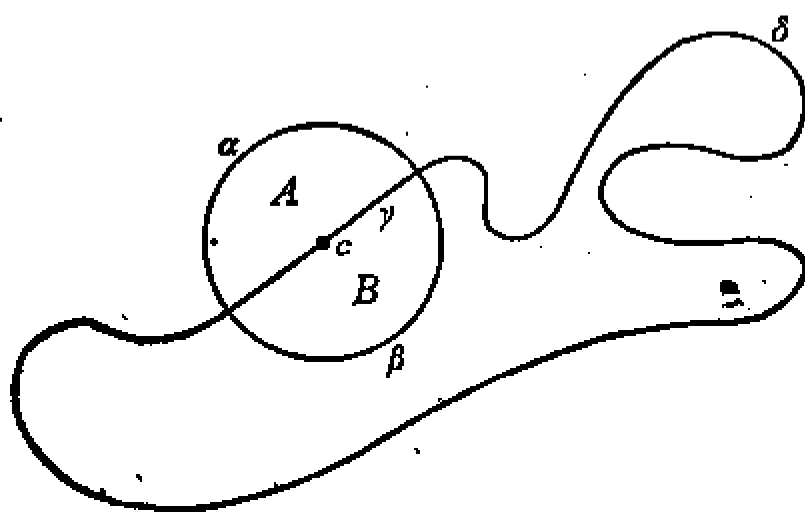


图13.2

显然，$U(c,r)-\gamma$恰有两个分支A，B；我们可以假定$\mathrm{Fr}A$

$=\alpha\cup\gamma$, $\mathrm{Fr}B=\beta\cup\gamma$. 据命题13.3，$C-J$的每个分支都与$U(c,r)$相交，因而它们必包含$A$或$B$。所以$C-J$至多有两个分支。

选取$a\in A$，$b\in B$；只要证明$J=\gamma\cup\delta$分离a和b就够了。现在$\alpha\cup\delta$与直线段ab不相交，因此不能分离这两点，然而$\alpha\cup\gamma$显然分离它们，据引理13.2得知$\gamma\cup\delta$分离a和b。■

一般情况　$J\subset C$是任意Jordan曲线。选取J的两个不同的点并画一条连结它们的直线段.如果这条线段位于J上,这就是上述的特殊情况。否则，比如说$c\notin J$，因为J是闭集，则在这线段上c之前存在一个末点x，而在这线段上c之后存在一个始点y。以γ表示线段xy且以α，β分别表示J的连结x和y的两段（闭的）弧（图13.3）。

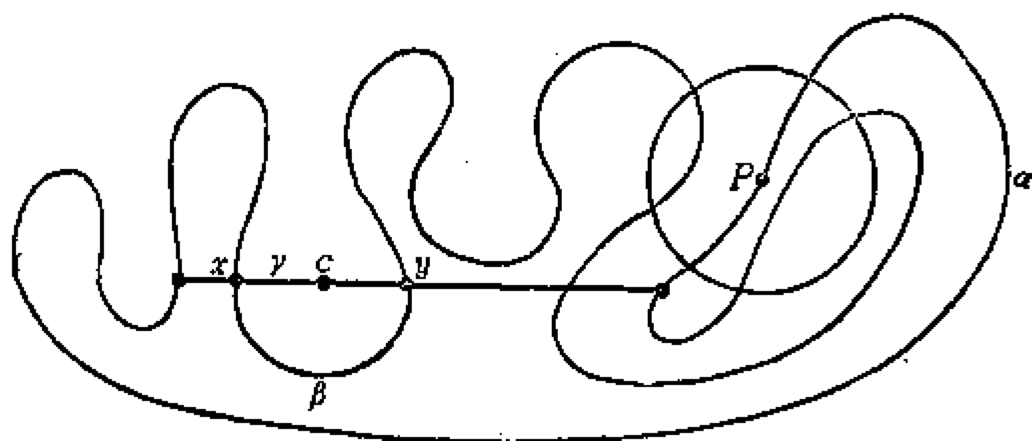


图　13.3

设$P\in\alpha$，并且$r<d(P,\beta\cup\gamma)$。据命题13.3，$C-J$的所有分支都与$U(P,r)$相交；把J用$\alpha\cup\gamma$代换后这同样成立.但对于Jordan曲线$\alpha\cup\gamma$该定理已经成立。于是只要证明$\alpha\cup\beta$分离$U(P,r)-J$的任何两点a，b当且仅当$\alpha\cup\gamma$分离它们就够了。因为$\beta\cup\gamma$与直线段$ab\subset U(P,r)$不相交，因此它不分离a和b。所以由引理13.2就可得到所要求的结果。■

R^n和S^n中的点集

第二个证明的思路是把关于平面上 Jordan曲线的问题与关于它在三维 Euclid 空间中的位置问题联系起来，然后去解决后者。其详细内容涉及球面和 Euclid 空间之间的一些相互关系，如同在在12章中那样。

截止到现在为止，虽然把本书中所使用的代数保持在最低限度，但在下一章中就必需要熟悉一下商群，并且下边就要用到它。如果A是一个(Abel)群而B是它的一个子群，则我们可以定义一个"商群"A/B和一个商映射$p:A\longrightarrow A/B$。这用下列两条性质的无论哪一条都可在同构的意义下来刻画：

i）对于使得$f(B)=0$任意同态$f:A\longrightarrow G$都存在(唯一的）同态$\phi:A/B\longrightarrow G$使得$f=\phi\circ p$。试与自由 Abel 群的万有性质作比较！ ii）序列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow A\stackrel{p}{\longrightarrow}A/B\longrightarrow 0$$

是正合的。

熟悉商群的读者自己很容易验证这些性质。现在对于任意非空的空间X和点P，唯一的映射$c:X\longrightarrow P$诱导一个包含映射

$$Z\cong H^0(P)\longrightarrow H^0(X).$$

我们用$\widetilde{H}^0(X)$表示相应的商群。在下面的结果中，将要用到关于这些群的类比于定理8.1的一个结论，我们把它的证明留作一个练习（练习13.7）。

回忆一下，S^n是R^{n+1}的一个子集，其定义为

$$\sum_1^{n+1}x_i^2=1.$$

我们把R^{n+1}与R^{n+2}中由$x_{n+2}=0$给定的子集等同起来，因而也就把S^n与S^{n+1}的一个子集等同起来了。

13.4定理 如果K是S^n的一个子集，则

$$\tilde{H}^0(S^n-K)\cong H^1(S^{n+1}-K).$$

证明 设D_+^{n+1}，D_-^{n+1}分别是由$x_{n+2}\geqslant 0$和$x_{n+2}\leqslant 0$确定的S^{n+1}的子空间；我们可把它们设想成上半和下半球面。因为D_+^{n+1}在S^{n+1}中是闭集，故$D^{n+1}-K$在$S^{n+1}-K$中是闭集。因此据Mayer-Vietoris定理（练习13.7）序列

$$\tilde{H}^0(D_+^{n+1}-K)\oplus\tilde{H}^0(D_-^{n+1}-K)\longrightarrow\tilde{H}^0(S^n-K)$$

$$\xrightarrow{\Delta}H^1(S^{n+1}-K)\longrightarrow H^1(D_+^{n+1}-K)\oplus H^1(D_-^{n+1}-K)$$

是正合的。我们希望证明Δ是一个同构；如果它的外侧两项是0（据引理2.1），则由这序列的正合性即可得到所要求的结果。因此，只要证明$D_+^{n+1}-K$是可收缩的就足够了。

由于R^{n+2}到R^{n+1}上的垂直投影给出D_+^{n+1}到D^{n+1}上的一个同胚，因而也给出$D_+^{n+1}-K$到$D^{n+1}-K$上一个同胚。但$D^{n+1}-K$是凸集，因此是可收缩的。■

特别注意，如果$J\subset S^2$是Jordan曲线，则

$$\tilde{H}^0(S^2-J)\cong H^1(S^3-J).$$

如同在定理11.7中那样，为了证明S^2-J有两个道路连通分支，我们必须证明这些群是无限循环群。为此要用到下面的技巧。

13.5定理 设$K\subset R^m$，$L\subset R^n$是闭子集，$f:K\longrightarrow L$是一个同胚。则存在由R^{m+n}到自身上的一个同胚h，使得对于$k\in K$，$h(k,0)=(0,f(k))$。

证明 把f看作是$K\longrightarrow R^n$的一个映射。因为K在R^m中是闭集，把Tietze扩张定理（定理7.4的推论）应用于R^n的各分量，则可推出f有一个连续的扩张$g:R^m\longrightarrow R^n$。现在定义$R^{m+n}=R^m\times R^n$上的同胚h_1为

$$h_1(x, y)=(x, y+g(x)).$$

显然，这个映射和它的逆都是连续的，现在我们有

$$h_1(k,0)=(k,g(k))=(k,f(k)).$$

对于f^{-1}应用同样的论证方法我们得到 $\mathbf{R}^{m+n}$ 上的同胚h_2使得

$$h_2(0, f(k))=(k, f(k)).$$

现取$h=h_2^{-1}\circ h_1$，这就证明了本定理。■

这个定理有两种情况特别值得说明一下。如果K是紧致的，则K和$L=f(K)$是闭集这个事实可由引理1.9得到，没有必要假定它们是闭的。然而，将要用到的情况却是稍微有点不同。

推论 设$f:R\longrightarrow R^n$是一个具有闭（的）象的嵌入。则存在R^{n+1}上的同胚h，使得对于$t\in R$有$h(0, \cdots, 0, t)=f(t)$.■

为了把它应用到我们的问题，必须首先从 Euclid 空间转移到球面。

13.6引理 设N是在x_{n+1}轴上的单位点；$e:R^n\longrightarrow S^n-\{N\}$表示从$N$作球极平面射影所得到的同胚，又设$h$是$R^n$上的一个同胚。定义$H:S^n\longrightarrow S^n$为

$$H(e(x))=e(h(x))\quad (x\in R^n),\ H(N)=N,$$

则H是一个同胚。

证明 H显然是双射；如果我们能够证明H是连续的，而用同样的论证方法推出H^{-1}是连续的，因此H就是一个同胚。

设U是S^n的一个开集。如果$N\notin U$，则$U=e(V)$，其中V在R^n中是开集；如果$N\in U$，则$S^n-U=e(K)$，其中K在R^n中是紧致的。因为h是同胚，$h^{-1}(V)$在R^n中是开集（相应地，$h^{-1}(K)$是紧致的）。因此，在第一种情况下$H^{-1}(U)=e(h^{-1}(V))$是开集；在第二种情况下，$H^{-1}(S^n-U)=e(h^{-1}(K))$是紧致的，因此是

闭集，从而$H^{-1}(U)$仍是开集．所以H是连续的．

第二个另外的证明（依照Doyle的证法）

设 $J\subset S^2$是 Jordan 曲线．我们可以假定（如果必要的话旋转S^2）J包含北极N．则$J-\{N\}$同胚于S^1减去一个点，因此同胚于R，并且因为J在S^2中是闭集，所以$J-\{N\}$在 $S^2-\{N\}$中是闭集．于是存在一个嵌入$f:R\longrightarrow R^2$使 $J-\{N\}=e(f(R))$并且因而具有闭（的）象．

据定理13.5的推论，存在R^3上的一个同胚h，把x_3轴映射到$f(R)\subset R^2\subset R^3$上．现在据引理13.6，这确定$S^3$上的一个同胚$H$，使得由$x_1=x_2=0$给定的大圆$C$映射到 $J\subset S^2\subset S^3$上，于是H诱导出S^3-J到S^3-C的一个同胚，但据定理12.4，S^3-C是同胚于$S^1\times C$的，因此应用定理13.4，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^0(S^2-J)&\cong H^1(S^3-J)\\&\cong H^1(S^3-C)\\&\cong H^1(S^1\times C)\cong Z\end{aligned}$$

并且$H^0(S^2-J)\cong Z\oplus Z$．因为$S^2-J$是 $l.p.c$ 的，据定理 4.7，$H^0(S^2-J)$同构于群 Map $(\pi_0(S^2-J),Z)$．因此 S^2-J 恰有两个分支．■

Jordan曲线定理最后这个证明引出了这样的问题：在R^2中给定一条 Jordan 曲线J，是否不存在R^2到自身上的同胚h，使得$h(J)=S^1$．对于这个问题的回答是肯定的，但它的证明比起Jordan曲线定理本身的证明实际上要困难．对于 R^3中 Jordan 曲线的相应的问题的回答则是否定的，因为存在着纽结（然而这点也需要证明）．

（平面）区域的不变性

现在我们给出 Jordan 曲线定理的一些推论。

13.7引理 设 $f: D^2 \longrightarrow R^2$是内射并连续。则 f 是一个嵌入，而且$f(\mathrm{Int}D^2)$是$R^2 - f(S^1)$的有界分支。

证明 因为 D^2 是紧致的，故据定理1.11可得到 f 是一个嵌入。因此$f(S^1)$是 Jordan曲线，并把 R^2分离成两个分支。另外，$\mathrm{Int}D^2$是连通的，因此$f(\mathrm{Int}D^2)$也是连通的；而且它与$f(S^1)$不相交（f 是内射），所以 $f(\mathrm{Int}D^2)$ 被包含在 $R^2 - f(S^1)$ 的一个分支内。

如果$f(\mathrm{Int}D^2)$不是$R^2 - f(S^1)$的一个整个分支，则 $R^2 - f(D^2)$包含 $R^2 - f(S^1)$ 的两个分支中的一些点，因而它是不连通的，这与定理9.4的推论矛盾。因为$f(D^2)$是同胚于D^2的，而 $f(D^2)$ 是紧致的，因此是有界的。这就证明了所要求的结果。■

推论 f 同上，则$f(\mathrm{Int}D^2)$在R^2中是开集。■

现在我们可以证明关于“(平面)区域的不变性”的Brouwer定理。这里的区域一词表示一个（R^2的）连通开子集。

13.8定理 设U是R^2的一个开子集，而$h: U \longrightarrow R^2$是内射并连续。则 h 是一个嵌入且$h(U)$在R^2中是开集。

证明 设$x \in U$；选取 r 使得 $U(x, 2r) \subset U$——这是可能的，因为U是开集。定义$f: D^2 \longrightarrow R^2$为：

$$f(u + iv) = h(x_1 + ru,\ x_2 + rv)。$$

则因为 h 是内射并连续，f 亦然。故据引理13.7的推论，$f(\mathrm{Int}D^2)$在 R^2 中是开集。因而 $h(x) = f(0)$是$h(U)$的内点，因为这对所有$\in U$都成立，所以$h(U)$在R^2中是开集。

至于 h 是嵌入的问题，我们必须证明V 在U中是开集蕴涵

$h(V)$在$h(U)$中是开集。但V在U中是开集蕴涵V在R^2中是开集；现在，已经证明了的结果蕴涵$h(V)$在R^2中是开集，因而它在$h(U)$中也是开集。∎

当然，如果h能扩张成R^2到自身上的同胚，上述结果是平凡的。因为它会自然地将开集映射成开集。h不能扩张的一个例子是$U = U_1(0) \subset C$，$h(z) = z/(1-|z|)$。这个结果的一部分可理解为：如果$V \subset R^2$同胚于R^2的开子集，则V是开集。这强调了R^2的齐次性。对于某些空间，例如本章开头引入的空间Θ，相应的性质并不成立。

进一步的发展

因为 Jordan 曲线定理实际上只是对偶定理的一个特殊情况，因而后者的推广包括了前者的推广，同时也就给出了定理13.4的推广；类似地，区域的不变性也可直接推广到R^n中。更有趣的结果是对于R^2上任意的 Jordan 曲线，存在R^2上的一个同胚h使得$h(J) = S^1$，这就是"Schönflies"定理。（对其证明可参阅 Newman 的书，作为它的第一步是下面的练习 13.3）。用同样的思路对于弧（同胚于I的象）也可证明这个结果。在R^3中，这个结果不仅对于S^1（纽结）不成立，而且对于I（自然弧）和对于S^2（自然球面）也不成立。对此，例如可参阅 Fox和 Artin 的经典性的文献。关于由嵌入$f: S^{n-1} \longrightarrow R^n$蕴涵存在$R^n$上的一个同胚$h$，使得$h \circ f$ = 恒同映射的条件最为有趣。对此，例如可参阅Brown的文章。

Brown, M., " A Proof of the Generalized Schönflies Theorem", Bull.Amer.Math.Sco.,66,74—76, (1960).

Fox,R.H.and E.Artin, "Some Wild Cells and Spheres in Three dimensional Space,"Ann. of Math.,49,979—990,

(1948).

Newman, M.H.A., 《Elements of the Topology of Plane Sets of Points》,

Cambridge University Press, 1939(2nd edn. 1951).

练习和问题

1. a)证明：对于任意嵌入$f:\Theta\to \mathbf{C}$，$\mathbf{C}-f(\Theta)$有三个分支，它们的边界分别是$f(S^1)$，$f(U)$和$f(L)$。

b)设G是具有四个顶点A,B,C和D及六条棱AB，AC,AD,BC，BD和CD的图形。证明：对于任意嵌入$f:G\to \mathbf{C}$，$\mathbf{C}-f(G)$有四个分支，a,b,c和d，其中a的边界是三角形的边BC,CD,DB等等。

c)设H是具有五个顶点A,B,C,D和E及连结每对顶点的十条棱的图形。证明不存在这样的嵌入$f:H\to \mathbf{C}$，使得$\mathbf{C}-f(H)$的任何分支能包含$f(E)$（例如，若$f(E)\in a$，证明$f(AE)$必与某条其它的棱相交）。

2. 设$J\subset \mathbf{C}$是一条Jordan曲线，A是它的余集的分支之一。证明：对于给定的$x\in J$和$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得若两点$p,q\in A$具有$d(x,p)$和$d(x,q)<\delta$，则它们可用在$A\cap U(x,\varepsilon)$中的一条道路连结起来。〔提示：这问题与$J\cup\{z:|z-x|=\varepsilon\}$是否分离$p$和$q$有关。选取适用于定理9.5的一些集合。〕

3. 应用前一练习，构造一条道路$f:[0,1]\to \mathbf{C}$使得$f([0,1])\subset A$和$f(1)=x$。

4. 设$M^r\subset \mathbf{R}^n$是一个流形，即M^r的每个点有一个同胚于$\mathbf{R}^r$的一个开子集的邻域。证明：$M^r\times 0\subset \mathbf{R}^{n+r}$的每个点都有$\mathbf{R}^{n+r}$中的一个邻域$U$及一同胚$\phi:U\to \mathbf{R}^{n+r}$使得$\phi(U\cap M^r)=\mathbf{R}^r\times 0\subset \mathbf{R}^{n+r}$。

5. 如果分别用$\mathbf{R},I,\mathrm{Int}D^2$，$D^2,S^2$代替$\mathbf{R}^2$，区域的不变性（定理13.8）继续成立吗？

6. 一个曲面是一个空间，其每个点x都有同胚于D^2的一个邻域N，比如说，以$\phi:N\to D^2$表示此同胚。证明：如果对于某个这样的“图”有$\phi(x)\in S^1$，则对于它们所有的图亦然。〔提示：用区域的不变性。〕这样一些点叫做该曲面的边界点。

7. 证明：如果H^0全部用$\widetilde{H}^0$代替，定理8.1继续成立。

8. 举些例子证明对于θ曲线，区域的不变性不成立，即，给定一些开集$A\subset\theta$和连续内射$f:A\to\theta$使得

a) f不是一个嵌入，

b) $f(A)$在θ中不是开集。

*9. 对于"Wada湖"讨论命题13.3的类比。

10. 证明：如果K在$\boldsymbol{R}$中是紧致的，并且SK（如同练习8.3中那样）定义为$\boldsymbol{R}^2$中连结K的点到点$(0,1)$和$(0,-1)$的所有线段的并集，则$\boldsymbol{R}-K\subset\boldsymbol{R}^2-SK$诱导$\pi_0$上的一个双射。试推出存在一个同构$\widetilde{H}_0(\boldsymbol{R}-K)\to\widetilde{H}^0(K)$，因此$\widetilde{H}^0(K)$是一个自由Abel群。现在可再试作一次练习4.7。

第14章　进一步的对偶性质

导言

如同由K的性质可推出$C-K$或S^2-K的道路连通分支的数目一样，把紧致集合K的连通性与$C-K$的性质联系起来是可能的和有趣的。在本章中，我们将描述空间X的一个新的拓扑不变量$H_1(X)$，并概述与已经给出过的对偶定理相类似的第二对偶定理。这个结果在下一章讨论复分析中的 Cauchy 定理的公式表示中得到应用。但在本章中我们将不给出证明。部分是因为空间的原因，部分是因为这个问题在任何维数的空间中讨论都并不很困难。对更详尽的论述感兴趣的读者可查阅列在本章末的更高等的书目之一。

群$H_1(X)$

已经给出的对偶定理论述了

$$D:\widetilde{H}_0(C-K)\to H^1(K)$$

是一个同构。这里的想法是希望得到一个同构

$$I:H_1(C-K)\to H^0(K),$$

其中H_1也还要进行讨论。为了引出定义，要注意到$H^0(X)$和$H^1(X)$分别定义为映射$X\to \mathbf{Z}$和$X\to S^1$的同伦类的群，而对于$H_0(X)$必须用X的点（或，一点到X内的映射），一种等价关系，以及某些代数。类比地指出，对于$H_1(X)$，要用I或S^1到X内的映射，一种等价关系，以及某些代数；在技术上使用I则是更方便些。等价关系则必须允许把两个区间在公共端点处粘合起

来，以及是端点固定的同伦．下面的定义与此是等价的，只是更简单些．

对于任意空间X，我们有所有连续映射$f:I\to X$的集合Map(I,X)．定义群$C_1(X)=F(\mathrm{Map}(I,X))$，定义$\partial':\mathrm{Map}(I,X)\to F(X)=C_0(X)$为

$$\partial'(f)=i(f(1))-i(f(0)),$$

并设$d_1:C_1(X)\to C_0(X)$是相应的同态．

把对于$H_0(X)$的定义后面部分的重新陈述留给读者作为一个练习．

14.1引理 下面的序列是正合的：

$$C_1(X)\xrightarrow{d_1}C_0(X)\xrightarrow{F(p)}H_0(X)\longrightarrow 0.\ \blacksquare$$

H_1的定义在这方面是一个典型．把$\mathbf{R}^2$中的三角形$0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$记为$T$，并定义$I$与$T$的棱之间的同胚为

$$\partial_0(t)=(t,\ 0),\ \partial_1(t)=(t,\ t),\ \partial_2(t)=(1,\ t)$$

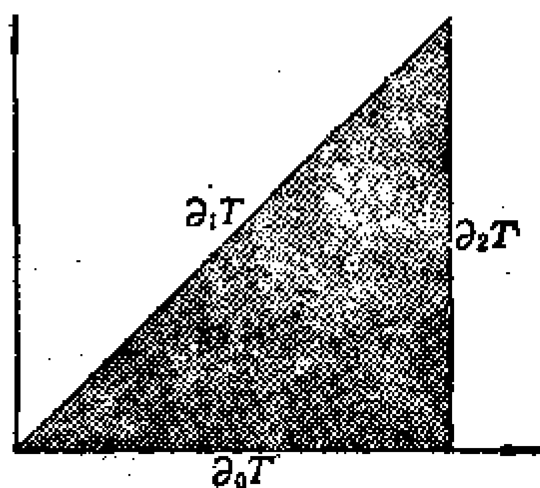


图14.1

（图14.1）．现在记$C_2(X)=F(\mathrm{Map}(T,X))$，并设$d_2:C_2(X)\to C_1(X)$是这样的同态，它使得对于$\phi:T\to X$有

$$d_2(i(\phi))=i(\phi\circ\partial_0)-i(\phi\circ\partial_1)+i(\phi\circ\partial_2).$$

作为检查对记号和设置减号的理由的理解，读者自己证明下面简单的结果。

14.2引理 我们有$d_1 \circ d_2 = 0$。■

$\mathrm{Ker}d_1$ 的元素称为 1- 闭链；$\mathrm{Im}d_2$ 的元素称为1-边缘链。$H_1(X)$ 定义为商群

$$H_1(X) = \mathrm{Ker}d_1/\mathrm{Im}d_2;$$

据引理，$\mathrm{Im}d_2 \subset \mathrm{Ker}d_1$。

H_1的一些形式上的性质可以象H_0的那些性质一样得到。我们逐条叙述在下面，并作适当的提示，使得好学的读者自己能证明出这些结果。

14.3引理 任意连续映射$f: X \to Y$都诱导一个同态

$$f_*: H_1(X) \to H_1(Y);$$

恒同映射诱导恒同同态。并且如果$g: Y \to Z$，则$(g \circ f)_* = g_* \circ f^*$。

注意到（通过合成）f 诱导一个映射

$$f_*: \mathrm{Map}(I, X) \to \mathrm{Map}(I, Y),$$

从而诱导一个同态

$$F(f_*): C_1(X) \to C_1(Y)。$$

类似地，还有C_0，C_2上所诱导的同态，并且可以验证下面的图表是交换的。由代数演算即可得到引理的断言。

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X) & \to & C_1(X) & \to & C_0(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_2(Y) & \to & C_1(Y) & \to & C_0(Y) \end{array}$$

14.4引理 如果$f_0 \simeq f_1: X \to Y$，则$f_{0*} = f_1: H_1(X) \to H_1(Y)$。

事实上，设$H: X \times I \to Y$是一个同伦。对于每个$P \in X$，$t \longmapsto$

$H(P,t)$是Y中的一条道路，也给定了$C_1(Y)$的一个元素。于是得到同态

$$s_0: C_0(X)\to C_1(Y).$$

类似地，对于每个$f\in \mathrm{Map}(I,X)$，我们定义sf和 $s'f\in \mathrm{Map}(T,Y)$为

$$sf(u,v)=H(f(u),\ v),$$

$$s'f(u,v)=H(v,f(u)).$$

让 f 所在的类对应于$i(sf)-i(s'f)$，从而给定一个映射

$$s_1: C_1(X)\to C_2(Y).$$

现在

$$d_2s_1(x)=f_{1*}(x)-f_{0*}(x)-s_0d_1(x),$$

容易得到所要求的结果。■

$H_1(X)$的性质

下面的结果是相当难的，关于它的证明，我们将不说很多，请参阅练习14.2和14.3。

14.5 Mayer-Vietoris 定理设X_1和X_2是X的开子集，使得$X_1\cup X_2=X$，$X_1\cap X_2=Y$ 则存在正合序列（其中的映射与定理8.1中的相似）

$$H_1(Y)\to H_1(X_1)\oplus H_1(X_2)\to H_1(X)\xrightarrow{\Delta} H_0(Y)\to$$

$$H_0(X_1)\oplus H_0(X_2)\to H_0(X)\to 0.$$

注意对于定理8.1，要求X_1和X_2在X中是闭集；而这里要求它们是开集。与前面相似，证明的关键部分是定义映射Δ。其思路是，对于给定的区间（或三角形）到X中的映射，把这些区间（或三角形）切割成——或把它们重分成为——一些较小的区间（或三角形），使其中的每一个都全部映射到X_1或X_2中。如果x是

X中代表$\xi \in H_1(X)$的一个链，把x重分为x_1+x_2，使 $x_i \in C_1(x_i)$，然后有$d_1x_1+d_1x_2=0$，这样

$$d_1x_1 \in C_0(X_1 \cap X_2).$$

现在我们定义$\Delta\xi$为d_1x_1所代表的类。整个的证明就是精心使用重分的过程。■

重分的反面也是有趣的，它使我们可以把上面的一些定义与在这些定义中用S^1代替 I 后的定义联系起来。

14.6引理 设X是道路连通的。则$H_1(X)$的任意一个元素都可由一个圈$f: I \to X$来代表。

对于给定的使 $f_2(0)=f_1(1)$的两个圈，如同在第5章一样，可组成一个合成$f_1 * f_2$。容易构造一个三角形使

$$d_2(\phi)=i(f_1 * f_2)-i(f_1)-i(f_2).$$

类似地，$-i(f)$可用$i(R \circ f)$来代替。把这些应用到任意1-闭链：所有项可合拼成一些圈，这些圈又可利用X的道路连通性连接起来。■

然而要把定义$H_1(X)$的那些圈之间的等价关系写清楚，并不是很简单的事情。为了对圈作合成，必须选一个基点；然后可用模同伦定义基本群$\pi_1(X)$，它一般是非 Abel的。得到 $H_1(X)$ 的彻底的几何方法是运用边缘，并求得一个由（定向）曲面到X中的映射，此曲面的边界圈正好是X中给定的一组圈。对于这方面的发展情况，可查阅本章末附的参考文献。我们下面继续进行H_1与H^1之间的类比。

14.7引理 存在一个自然同态

$$H^1(X) \to \mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbf{Z}).$$

如果X是$l.p.c.$的，此同态是内射。

首先，可以（例如，应用定理14.5）计算得到$H_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.其

次，每个$f: X \to S^1$可诱导

$$f_*: H_1(X) \to H_1(S^1) \cong \mathbf{Z},$$

据引理14.4，f_*只与f的同伦类有关，同时容易看出它是可加的。如果$f_*=0$，则对于每个圈$l: S^1 \to X$，就有$0=(f\circ l)_*$，由此得到$\deg(f\circ l)=0$，据定理7.1，f是零伦的。■

人们也许会希望在与定理4.8所需要的某些相同的条件下，这个同态将是一个同构，依照覆迭空间的标准理论，这确实是可以得到的。

对偶性

现在我们来构造第二个对偶映射。设K是$\mathbf{C}$的紧致子集，$z\in K$，$f: I \to \mathbf{C}-K$。定义映射$g_z: I \to S^1$为

$$g_z(t) = N(z - f(t))$$

它的提升是连续映射$\tilde{g}_z: I \to \mathbf{R}$；定义$f$对于$z$的指数为$\tilde{g}_z(1) - \tilde{g}_z(0)$。显然这与提升的选取无关，而它却连续地依赖于$z$。因而它给定了$\mathrm{Map}(K,\mathbf{R})$的一个元素。根据万有性质进行扩张，得到一个同态

$$I_1: C_1(\mathbf{C}-K) \to \mathrm{Map}(K,\mathbf{R}).$$

14.8引理 我们有$I_1\circ d_2=0$。存在一交换图表

$$\begin{array}{ccc} C_1(\mathbf{C}-K) & \xrightarrow{I_1} & \mathrm{Map}(K,\mathbf{R}) \\ \downarrow d_1 & & \downarrow e_* \\ C_0(\mathbf{C}-K) & \xrightarrow{D_3} & \mathrm{Map}(K,S^1) \end{array}$$

推论 如果$d_1z=0$，则$I_1z\in \mathrm{Map}(K,\mathbf{Z})$。因而$I_1$诱导一个映射

$$I_2: H_1(C-K) \to \mathrm{Map}(K, Z) = H^0(K).$$ ■

则I_2是一个对偶映射。现在我们可以叙述第二对偶定理并且可以指出它与第一个是怎样相关联的。■

14.9定理 对于C的任意紧致子集K，$I: H_1(C-K) \to H^0(K)$是一个同构。而且，如果K_1与K_2二者都是C的紧致子集，则下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H_1(C-K_1-K_2) & \to & H_1(C-K_1)\oplus H_1(C-K_2) & \to & H_1(C-K_1\cap K_2) & \to & \tilde{H}_0(C-K_1-K_2) & \to & \tilde{H}_0(C-K_1)\oplus \tilde{H}_0(C-K_2) & \to & \tilde{H}_0(C-K_1\cap K_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(K_1\cup K_2) & \to & H^0(K_1)\oplus H^0(K_2) & \to & H^0(K_1\cap K_2) & \to & H^1(K_1\cup K_2) & \to & H^1(K_1)\oplus H^1(K_2) & \to & H^1(K_1\cap K_2)
\end{array}$$

其中两个序列分别是定理8.1和14.5中的 Mayer–Vietoris 序列，而竖直的映射是对偶同构。

注意下面的序列中的第一个映射是内射，而上面的序列中的最后一个映射是到上映射。因此我们可以在每个序列的端点添加上 0 而仍保持正合性，这与前面对一些特殊情况所考察过的相同。中间方块的交换性是这样获得证明的：由 $C-(K_1\cap K_2)$中的一个闭链开始，这个闭链正是$C-K_1$和 $C-K_2$ 中的链之和，再应用引理14.8的图表。■

推论 如果K是S^2的闭子集，则存在一个同构

$$H_1(S^2-K) \xrightarrow{\sim} H^0(K).$$

因为如果$K=S^2$，结论是显然的；否则旋转球面 S^2 使得$\infty \notin K$。因为K在 S^2 中是闭集，故它也是紧致的，所以可应用定理14.9。把要证明的余下部分留作练习（练习14.5）■

平面区域

上述理论的一个应用是用于平面区域的拓扑，即C的连通的

开子集的拓扑．这些在复分析中也是很有用的（参阅下一章）．这里我们讨论开集U，它的闭包和它的边界之间的关系．同第12章一样，很多情况中的自然的包含空间是S^2．如果U的闭包是整个S^2，则U在S^2中的余集与其边界重合，并据上面的推论，$H_1(U)\cong\widetilde{H}^0(S^2-U)$．除此以外，可以旋转$S^2$使得$\infty$不在其闭包中．这相当于$U$是$C$的有界子集．回忆起以$Cl(U)$表示$U$的闭包（在$C$中或在$S^2$中一样），$\mathrm{Fr}U=Cl(U)-U$表示其边界．

14.10定理 设U是C的一有界连通开子集．则存在同构

$$\widetilde{H}^0(\mathrm{Fr}U)\cong\widetilde{H}^0(C-U)\cong H_1(U),$$

并且这些群为0当且仅当$H^1(U)$为0．

证明 因为U是连通的，故$Cl(U)$也是连通的（参阅练习3.9）．则$(C;C-U,Cl(U))$的 Mayer-Vietoris 序列（用$\widetilde{H}^0$；参阅练习13.7），

$$\widetilde{H}^0(C)\to\widetilde{H}^0(C-Cl(U))\oplus\widetilde{H}^0(U)\to\widetilde{H}^0(\mathrm{Fr}U)\to H^1(C),$$

给出了第一个同构，定理14.9的推论给出了第二个同构．又据引理14.7，如果$H_1(U)=0$，$H^1(U)$也为0．

现在相反地假设$H^1(U)=0$，并且如果可能，$\widetilde{H}^0(C-U)\neq 0$，则$C-U$是不连通的．设$C-U=X\cup Y$是一个分划．如果$U$以$|z|=R$为界，则不妨说$Y$包含所有使$|z|\geqslant R$的点，故$X$是紧致的．据定理1.12，$d(X,Y)>0$，称它为$\varepsilon$．定义

$$U(X)=\{z\in C:d(z,X)<\varepsilon/3\},$$

$$U(Y)=\{z\in C:d(z,Y)<\varepsilon/3\},$$

因为$d(z,X)$是连续的，所以$U(X)$是开集．类似地，$U(Y)$也是开集．设

$$K=C-U(X)-U(Y).$$

它是闭集并有界（以R为界），因而是紧致的．如果$x\in X,y\in Y$，

则 $x\in U(X)$，$y\in U(Y)$ 分别位于 $C-K$ 的不同的分支中，所以它们是被 K 分离开的。如果定义

$$f(z)=N\left(\frac{z-x}{z-y}\right),$$

据 Eilenberg判别准则， $f:K\to S^1$ 不同伦于常值映射。但因为 f 定义在 U 上（x,y 不在 U 内），并且 $H^1((U)=0$，则存在 $f:U\to S^1$ 的一个零伦，而它在 K 上的限制给定了一个零伦。于是得到了一个矛盾。■

当这些群都为 0 时，区域 U 称为单连通的。可以证明，这等价于所有映射 $S^1\to U$ 都是零伦的条件；也等价于对于每条Jordan曲线 $J\subset U$，U 包含 J 的一个余区域这一条件。另一个等价条件（但比较深入）是 U 同胚于 C。

推论 对于 S^2 的连通开子集 U，S^2-U 的每个分支都是单连通的。

因为 $H_1(S^2-\overline{U})=\widetilde{H}^0(Cl(U))=0$。■

进一步的发展

本章是传统的代数拓扑学的一个十分简单的导引；我们有意识地使用了标准记号，以便使得希望作进一步探讨的读者不致发生混淆。较适合的书目有 Lefschetz的（形式稍老一些，但很几何化），Maunder的（或许最适合作为本书的续篇），Hocking 和 Young的以及Spanier的（虽然比前述的书较详尽，但作为导引显得深了点）。我们也提到了边缘。对于微分拓扑的一般导引参阅 Milnor 的著作；就边缘而言，可试看 Conner和 Floyd 的著作的第一章。

Conner, P. E. and E. E. Floyd, 《Differentiable Periodic Maps》, Springer, Berlin, 1964.

Hocking, J.G. and G. S. Young, 《Topology》, Addison-Westey, Reading, Mass., 1961.

Lefschetz, Solomon, 《Introduction Topology》, Princeton University Press, 1949.

Maunder, C.R.F., 《Algebraic Topology》, Van Nostrand, Princeton, 1970.

Milnor, J. W., 《Topology from the Differentiable View-point》 University Press of Virginia, 1965,

Spanier, E. H., 《Algebraic Topology》, McGraw-Hill, New York, 1966.

练习和问题

1. 成引理14.1到引理14.4的证明。

2. 对于X的具有交集Y的任意子集X_1和X_2，定义

$$C_i^A(X)=C_i(X_1)+C_i(X_2)\subset C_i(X), i=1,2.$$

（用正合序列的性质）证明：如果$H_1^A(X), H_0^A(X)$是用C_i^A定义的，则存在一个正合序列

$$H_1(Y)\to H_1(X_1)\oplus H_1(X_2)\to H_1^A(X)\to H_0(Y)\to$$

$$H_0(X_1)\oplus H_0(X_2)\to H^A(X)\to 0.$$

3. 证明存在映射 $H_1^A(X)\to H_1(X), H_0^A(X)\to H_0(X)$，且后者是到上的。它是内射，当且仅当对于$X$中端点为 $P\in X_1$，$Q\in X_2$ 的每条道路，存在一列点

$$P=R_0,R_1,\cdots,R_{2k}=Q,$$

使得可用X_1中的道路连结 R_{2i} 与$R_{2i+1}(0\leqslant i<k)$，可用X_2中的道路连结R_{2i-1}与R_{2i} $(1\leqslant i\leqslant k)$。证明：如果$X_1$和$X_2$二者在$X$中都是开集，则上述论断成立。如果二者都是闭集，它也必成立吗？

如果对于任意$f:I\to X$使得$f(0)\in X_1$，$f(1)\in X_2$，可用点列

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_{2k}=1$$

重分 I 使得 $f[a_{2i}, a_{2i+1}] \subset X_1$, $f[a_{2i-1}, a_{2i}] \subset X_2$，证明 $H_1^*(X) \to H_1(X)$是到上的。

4．给出引理14.8的一个证明。

5．设K是$U_C(0,R)$的紧致子集．由$f(t)=\mathrm{Re}(t)$给定的映射 $f: I \to \mathbf{C}-K$确定了$H_1(\mathbf{C}-K)$的一个元素x．证明$I_2(x)$是常值映射 $c: K \to Z$，且$c(K)=1$．因此得到二正合序列间的一个同构

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & Z & \to & H_1(\mathbf{C}-K) & \to & H_1(S^2-K) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow I_2 & & \downarrow & \\ 0 \to & Z & \to & H^0(K) & \to & \widetilde{H}^0(K) & \to 0 \end{array}$$

[提示：应用Mayer-Vietoris序列，其中$X_1=\{z \in \mathbf{C}: |z| \leqslant R,\ z \notin K\}$和$X_2=\{z \in S^2: |z| \geqslant R\}$.]

6．设$\Delta_n=\{x \in \mathbf{R}^{n+1}: x_i \geqslant 0, \Sigma x_i=1\}$．定义$\partial_i: \Delta_{n-1} \to \Delta_n$为

$$\partial_i(x_0,\cdots,x_{n-1})=(x_0,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_{n-1})\ (0 \leqslant i \leqslant n).$$

记$C_n(X)=F(\mathrm{Map}(\Delta_n, X))$，并设$d_n: C_n(X) \to C_{n-1}(X)$是同态，使得对于$\phi: \Delta_n \to X$，

$$d_n i(\phi)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r i(\phi \circ \partial_r).$$

验证类比于引理14.1到14.4的结果。

7．设Γ是具有顶点A_1，A_2，…，A_n和直线棱的图．又设$M \subset \mathrm{Map}(I, \Gamma)$是$I$到棱$A_iA_j$上的线性映射的集合，其中$i<j$；$C_1'(\Gamma)=F(M)$．(用归纳法，利用Mayer-Vietoris定理) 证明$\mathrm{Ker}(d_1|C_1'(\Gamma))$可同构地映射到$H_1(\Gamma)$上。(与练习8.25到8.27相比较。)

8．证明：如果U在$\mathbf{R}^n$中是开集，替代所有连续映射$I \to U$，仅用具有连续一阶偏导数的那些映射也可得到同样的群$H_1(U)$。(运用练习3.12的方法。) 试证明也可以对映射$T \to U$作限制。(为了做到这一点，需要什么？)

9．描述一下粘上一个n-胞腔后对H_1的影响（与练习8.9和练习8.10作比较）。

10．利用上一道练习题计算$H_1(M_g)$和$H_1(N_h)$，其中M_g，N_h与练习8.12

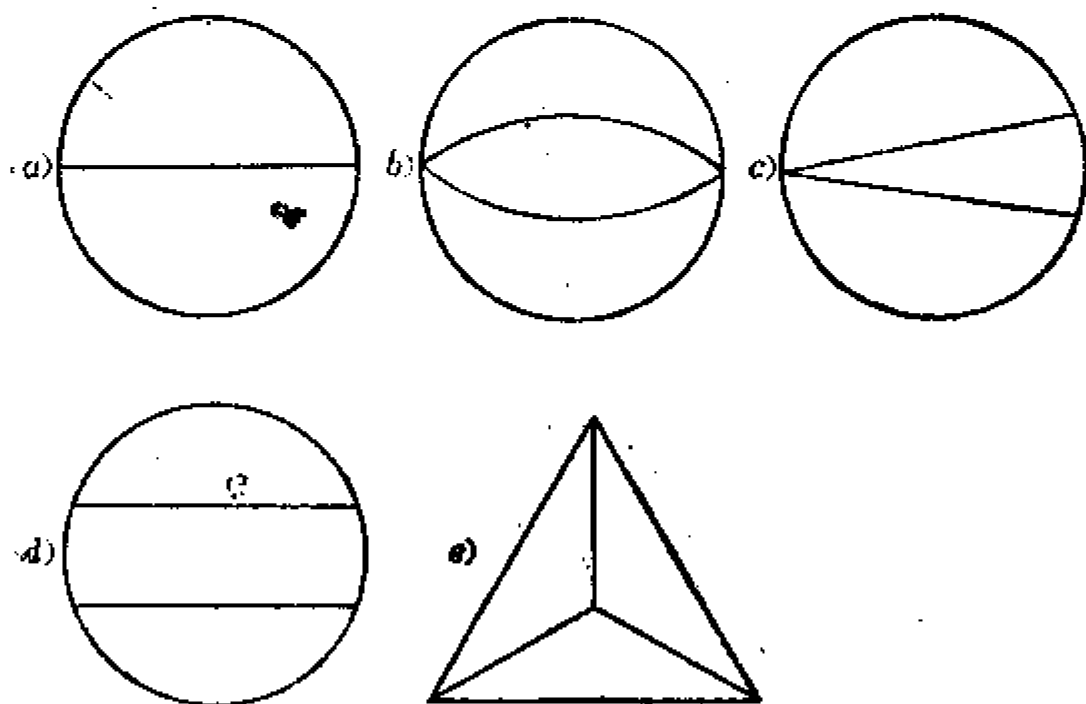
中的相同。

*11. 利用前两道练习题计算$H_1(P_n(\mathbf{R}))$和$H_1(P_n(\mathbf{C}))$。[提示：$P_n(\mathbf{R})$是在$P_{n-1}(\mathbf{R})$上粘上一个n-胞腔得到的；$P_n(\mathbf{C})$是在$P_{n-1}(\mathbf{C})$上加上一个$2n$-胞腔得到的。]

12. 利用定理14.9的图表的中间的方块证明下面的Alexander引理。设K，L是$\mathbf{C}$中只交于两点P、Q的紧致子集；$x,y\in\mathbf{C}-K-L$是既不被K也不被L分离的两个点。用$\mathbf{C}-K$中的道路α和$\mathbf{C}-L$中的道路β连结它们。则如果$\alpha*\beta$关于P的指数为0，$K\cup L$也不能分离x和y。

13. 证明：如果Γ是一个图，则$H_1(\Gamma)$是由圈的类生成的，这些圈都是Jordan曲线。

14. 对于下面的每个图，求出$H_1(\Gamma)$到$\mathbf{Z}^r$（对于某个r）上的一个同构，并说明由Jordan曲线所表示的它的元素：



f) 练习11.9的图。

g) 具有五个顶点，每对顶点以一条棱相连的图。

第15章　几何的积分理论

导言

第14章的一些结果与积分之间的关系，来自把映射$f: I\to C$考虑为可能的积分路径. 当然，这就要求 f 不仅仅是连续. 尽管已经知道假设路径是可求长的（即有有限的长度）就可以了，但为简单起见，我们将假定 f 是可微的. 因为在复变量的情况下，会产生额外的问题，所以本章从研究两个实变量的情况开始.

R^2中的线积分

线积分通常写作

$$\int_s a dx + b dy,$$

其中 s 表示路径. 把路径取作参数式$x=x(t)$, $y=y(t)$（可以假定）$0\leqslant t\leqslant 1$是方便的；这等于说我们有了一个映射 $f: I\longrightarrow R^2$. 于是这个积分可定义为

$$\int_0^1\left\{a(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+b(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\right\}dt,$$

为使这个积分有意义，函数 a 和 b 必须在$f(I)$上有定义，以及导数dx/dt和dy/dt必须存在.

为了应付第一点，我们选取开集$U\subset R^2$, 并只考虑映射 $f: I\longrightarrow U$ 和定义在U上的函数a, b. 至于第二点，对映射 f，我们要求导数dx/dt和dy/dt存在并在$[0, 1]$上连续. 因为只是对一阶导数附加了这个条件，故通常用$C^1(I,U)$表示这类映射的集合，

但为了避免与本书中其它一些记号发生混淆，我们将代之记作 $\mathrm{Map}^d(I,U)$，其中 d 代表可微分。

对函数 a 和 b，我们也要求它们满足一些条件。在这阶段假定 a 和 b 的一阶偏导数在 U 上存在并连续就足够了。形如 $adx+bdy$ 的表达式称为 U 上的1-微分形式。所有这样的形式构成的（在 R 上）向量空间表示为 $\mathscr{C}^1(U)$。

Green定理

关于线积分的一个重要定理是 Green 定理。粗略地说，它是

$$\int_s adx+bdy=\iint_A\left(-\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\right)dxdy,$$

其中 s 表示一个圈，A 表示它内部的区域。确切地阐明"内部"这个概念曾是我们的主要课题之一。现在我们来研究这个定理。

15.1引理 假定 $T\subset U$，则

$$\left(\int_{\partial_0}-\int_{\partial_1}+\int_{\partial_2}\right)(adx+bdy)=\iint_T\left(-\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\right)dxdy.$$

证明 显然，我们可以分别考虑含有 a 和含有 b 的项；两种情况下论证方法相同，因此只要考虑含 a 的项就足够了。

$$\int_{\partial_2} a\,dx=\int_0^1 a(t,0)dt,$$

$$\int_{\partial_1} adx=\int_0^1 a(t,t)dt,$$

$$\int_{\partial_0} adx=0 \text{ （}x\text{ 在}\partial_0\text{上是常值）.}$$

又，

$$a(t,t)-a(t,0)=\int_0^t\frac{\partial a}{\partial y}(t,y)dy.$$

因而

$$\left(\int_{\partial_1}-\int_{\partial_2}+\int_{\partial_3}\right)a\,dx=-\int_0^1\left(\int_0^x\frac{\partial a}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx$$

$$=-\iint_T\frac{\partial a}{\partial y}\,dx\,dy,$$

如所断言。■

这是一种比较特殊的情况，然而我们可以很容易地由它得到一般情况。设$\phi\in \mathrm{Map}^d(T,U)$。这就是说 ϕ 对两个坐标的两个偏导数存在并且连续。为避免混淆，T 中的坐标用 (u,v)表示，U 中的坐标用(x,y)表示。则

$$\frac{\partial(x\circ\phi)}{\partial u}$$

是此问题中的偏导数之一。

设

$$\omega=a(x,y)dx+b(x,y)dy$$

是U上的 1-形式。如果$f: I\to T\in \mathrm{Map}^d(I,T)$，则

$$\phi\circ f\in \mathrm{Map}^d(I,U),$$

并有线积分

$$\int_{\phi\circ f}\omega.$$

它又可表示为沿着 f 的线积分如下：

$$\int_{\phi\circ f}\omega=\int_0^1\left\{a(\phi(f(t)))\frac{dx}{dt}+b(\phi(f(t)))\frac{dy}{dt}\right\}dt.$$

现在作代换

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

从而有线积分$\int_T \phi^*\omega$，其中

$$\phi^*\omega = \left(a(\phi(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u} + b(\phi(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u} \right) du +$$

$$+ \left(a(\phi(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v} + b(\phi(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv.$$

对$\phi^*\omega$应用引理15.1．其左端是

$$\left(\int_{\partial_0} - \int_{\partial_1} + \int_{\partial_2} \right)(\phi^*\omega) = \left(\int_{\phi\circ\partial_0} - \int_{\phi\circ\partial_1} + \int_{\phi\circ\partial_2} \right)(\omega).$$

右端是在$dudv$前乘以下面式子后在T上的二重积分：

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{ a(\phi(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v} - b(\phi(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v} \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}\left\{ a(\phi(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u} + b(\phi(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u} \right\}$$

$$= \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + b \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

$$- \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - a \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - b \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$- \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - \left(\frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right).$$

如果ϕ是内射，且Jacobi 行列式为正，二重积分中变量代换的通常规则指明此二重积分等于

$$\iint_{\phi(T)} \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy.$$

对于任意（二次可微）的ϕ，我们把任意函数$c(x,y)$在ϕ上的二

重积分定义为

$$\iint_{\phi} c(x, y)dxdy = \iint_{T} c(\phi(u, v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dudv.$$

这样，所讨论的积分现在可以写作

$$\iint_{\phi}\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy.$$

对于$\omega = adx + bdy$定义

$$\delta\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy.$$

由此可作进一步的简化。

于是，应用这个记号我们已经证明了，引理15.1蕴涵着

15.2命题 如果U是R^2中的开集，$\phi: T \longrightarrow U$有连续的二阶偏导数，并且$\omega \in \mathscr{C}^1(U)$，则

$$\int_{\phi\circ\partial_0}\omega - \int_{\phi\circ\partial_1}\omega + \int_{\phi\circ\partial_2}\omega = \iint_{\phi}\delta\omega. \blacksquare$$

这个结果在记号上指出了另一个改进．积分$\int_s \omega$是由$s \in \mathrm{Map}^1(I,U)$和$\omega \in \mathscr{C}^1(U)$确定的．据万有性质可把它作为同态推广到$F(\mathrm{Map}^1(I,U))$上．即，如果$\xi = \Sigma n_r i(x_r)$，$n_r \in \boldsymbol{Z}$，$x_r \in \mathrm{Map}^1(I,U)$，有

$$\int_{\xi}\omega = \Sigma n_r \int_{x_r}\omega.$$

类似地，如同上述$\iint_A \eta$由$A \in \mathrm{Map}^1(T,U)$和形如

$$\eta = e(x,y)dxdy$$

的η所确定，可把$\iint_A \eta$作为同态推广到$F(\mathrm{Map}^1(T,U))$上．然后可把命题15.2写作

$$\int_{\partial\phi}\omega=\iint_{\phi}\delta\omega,$$

并且在适当的可微条件下确实成立。注意，为了使$\phi^*\omega$ 可微，必须假定ϕ有连续的二阶偏导数。

借助同调语言的重述

下面我们来清理一下。我们已对在第14章中用以定义 $H_1(U)$ 和$H_0(U)$的序列

$$C_2(U)\xrightarrow{d}C_1(U)\xrightarrow{d}C_0(U)$$

加以限制，仅允许映射具有连续的一阶偏导数。可以证明，这同样能得到与前述相同的同调群（参阅练习14.8）。为了最后的结果，仍需要求具有连续的二阶偏导数。为避免重复说明这种正当要求的必要性，从现在起我们假定这些映射具有任意阶连续偏导数。这里通常的记号本应是 $C^\infty(I,U)$，$C^\infty(T,U)$，然而我们仍简单地记作$\mathrm{Map}^d(I,U)$，$\mathrm{Map}^d(T,U)$，并把相应的自由 Abel 群作$C_1{}^d(U)$，$C_2^d(U)$。由此再次得到与前相同的群$H_0(U)$和$H_1(U)$，

类似的注释也适用于1-形式。我们这样来结束清理工作：把U上具有任意阶连续偏导数的实值函数的向量空间记作$\mathscr{C}^0(U)$，把1-形式

$$\omega=adx+bdy$$

的向量空间记作$\mathscr{C}^1(U)$，其中$a,b\in\mathscr{C}^0(U)$，最后，把表达式

$$pdxdy$$

（的向量空间）记作$\mathscr{C}^2(U)$，其中$p\in\mathscr{C}^0(U)$。定义线性映射

$$\mathscr{C}^0(U)\xrightarrow{\delta}\mathscr{C}^1(U)\xrightarrow{\delta}\mathscr{C}^2(U)$$

如下：对于$f\in\mathscr{C}^0(U)$，

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

对于$\mathscr{C}^1(U)$中的$\omega = adx + bdy$,

$$\delta\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy.$$

现在可以看出所以要假定无限可微分的一个理由，因为如果ω是r次连续可微的，那就只能指望$\delta\omega$是$(r-1)$次可微的。我们看到，对于任意的$f \in \mathscr{C}^0(U)$，$\delta\delta f = 0$（与引理14.1比较）

现在定义$\mathscr{H}^0(U) = \mathrm{Ker}(\delta: \mathscr{C}^0(U) \longrightarrow \mathscr{C}^1(U))$,

$$\mathscr{H}^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\delta: \mathscr{C}^1(U) \longrightarrow \mathscr{C}^2(U))}{\mathrm{Im}(\delta: \mathscr{C}^0(U) \longrightarrow \mathscr{C}^1(U))}.$$

其第一个是容易描述的。如果$\delta f = 0$，则在U上

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

根据增量公式，对于任意$P \in U$，f在P的附近是常值。由此得到f在U的每个分支上是常值，因而确定了一个映射$\pi_0(U) \longrightarrow \mathbf{R}$。这就推得

$$\mathscr{H}^0(U) \cong \mathrm{Map}(\pi_0(U), \mathbf{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_0(U), \mathbf{R}).$$

更有趣的是另一个群，它与我们刚做过的工作有联系。

15.3定理 积分定义了一个内射

$$J: \mathscr{H}^1(U) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(U), \mathbf{R}).$$

附注 事实上，J是一个同构。这可由de Rham定理得到。在本章末的参考文献中有有关这方面的描述。

证明 设$\omega \in \mathscr{C}^1(U)$，且$\delta\omega = 0$。我们知道，对于任意$\xi \in C_1{}^d(U)$有积分$\int_\xi \omega$。但我们只对Kerd有兴趣，也就是假定$\partial\xi = 0$。如果$\xi = d\phi$，则因为$\delta\omega = 0$，有

$$\int_\xi \omega = \int_{d\phi} \omega = \int_\phi \delta\omega = 0.$$

因此，$\xi \longrightarrow \int_{\xi} \omega$ 诱导一个同态

$$J(\omega): H_1(U) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

显然，$J(\omega_1+\omega_2)=J(\omega_1)+J(\omega_2)$。为了证明 J 确定 $\mathscr{H}^1(U)$ 上的一个同态，剩下只需验证如果 $\omega=\delta f$，则 $J(\omega)=0$。对于任意 $\xi \in \mathrm{Map}^d(I,U)$，用一个明显的记号，有

$$\begin{aligned}\int_{\xi} \omega &= \int_{\xi} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x(t),y(t))dt \\ &= f(x(1),y(1)) - f(x(0),y(0)) \\ &= \int_{\partial\xi} f.\end{aligned}$$

根据线性性质，对于任意 $\xi \in C_1^d(U)$，这也是成立的。因而，如果 $\partial\xi=0$，则如所断言，$\int_{\xi}\omega=0$。

注意这个论证与引理14.8的相似性。最后剩下证明 J 是内射。假定 ω 使得 $J(\omega)=0$，还可假定 U 是连通的；如果不连通，可对每个分支应用下面的论证。选取点 $P \in U$。对于每个点 $Q \in U$，存在一条由 P 到 Q 的路径 $\xi_Q \in \mathrm{Map}^d(I,U)$（根据练习3.11）。定义

$$f(Q)=\int_{\xi_Q}\omega.$$

对于任意 $\xi \in \mathrm{Map}^d(I,U)$，记 $Q_0=\xi(0)$ 和 $Q_1=\xi(1)$。则

$$i(\xi_{Q_0})+i(\xi)-i(\xi_{Q_1})=\eta \in C_1{}^d(U)$$

满足 $d\eta=0$。因为 $J(\omega)=0$，由此得到

$$0=\int_{\eta}\omega=\int_{\xi_{Q_0}}\omega+\int_{\xi}\omega-\int_{\xi_{Q_1}}\omega,$$

因此

$$\int_{\xi}\omega = f(Q_1) - f(Q_0).$$

特别地，由此得到$f(Q)$的定义与路径ξ_Q的选择无关。

取ξ是水平的路径。则我们发现（倘若线段 $p \leqslant x \leqslant p+h$, $y=q$位于U中），如果记$\omega = adx + bdy$就有

$$f(p+h,q) - f(p,q) = \int_0^1 a(p+th,q)hdt.$$

两边除以h并让$h \to 0$，则可看到$\partial f/\partial x$存在且等于 $a(x,y)$。类似地，$\partial f/\partial y$也存在且等于$b(x,y)$。因而f具有任意阶连续偏导数（因为a和b具有任意阶连续偏导数）。■

三维的情况

我们将很简略地讨论一下三维中的相应的情况。这里可以推广以上所述而得到（正如练习14.6所表明如何推广引理14.1的一样），对于$\mathbf{R}^3$中的开集U，映射

$$C_3^s(U) \xrightarrow{d} C_2^s(U) \xrightarrow{d} C_1^s(U) \xrightarrow{d} C_0^s(U) \longrightarrow 0$$

使得$d^2=0$；取$\mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$给定群$H_2(U)$、$H_1(U)$，$H_0(U)$。

类似地，我们有

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^0(U) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^1(U) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^2(U) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^3(U),$$

其中$\mathscr{C}^0(U)$是U上具有任意阶连续偏导数的所有实值函数构成的向量空间，而$\mathscr{C}^1(U)$，$\mathscr{C}^2(U)$和$\mathscr{C}^3(U)$分别由形如

$$a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3,$$

$$b_1dx_2dx_3 + b_2dx_3dx_1 + b_3dx_1dx_2,$$

$$cdx_1dx_2dx_3$$

的表达式构成（的向量空间），其中a_i，b_i，$c \in \mathscr{C}^0(U)$。$\mathscr{C}^i(U)$的每个元素称为U上的光滑的i-形式。映射δ定义为

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3,$$

$$\delta(a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3)=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_2dx_3$$

$$+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)dx_3dx_1+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2,$$

$$\delta(b_1dx_2dx_3+b_2dx_3dx_1+b_3dx_1dx_2)$$
$$=\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}+\frac{\partial b_2}{\partial x_2}+\frac{\partial b_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3.$$

注意它们与所熟悉的微分算子grad，curl，div之间的密切关系。

现在我们有了平凡的公式（参看前面的讨论），对于 $f\in\mathscr{C}^0(U)$，$\xi\in C_1^s(U)$，

$$\int_\xi \delta f=\int_{\partial\xi}f.$$

其次，Stokes定理告诉我们，对于$\omega\in\mathscr{C}^1(U)$，$\phi\in C_2^s(U)$，

$$\int_\phi \delta\omega=\int_{\partial\phi}\omega.$$

最后，Gauss定理是说，对于$\alpha\in\mathscr{C}^2(U)$，$\tau\in C_3^s(U)$，

$$\int_\tau \delta\alpha=\int_{\partial\tau}\alpha.$$

如同对前面的Green定理一样，对这里的每一种情况，只需建立起标准情况（I，或T，或一个标准四面体）下的结果，并研究映射下的性态就足够了。

通过与前面一样的论证，我们得到映射

$$\mathscr{H}^0(U)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_0(U),\ R),$$
$$\mathscr{H}^1(U)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(U),\ R),$$
$$\mathscr{H}^2(U)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2(U),\ R),$$

并且可以证明所有这三个映射都是同构。但这里不予证明。

复变量的情况

我们在这里的目的，不在于再次给出更多新的，深入的结果

的证明，而是指出关于单复变量的标准定理如何符合现在的结构。我们回到$R^2=C$并且记$z=x+iy$。

考虑一个复1-形式

$$
\begin{aligned}
\omega &= f(z)dz \\
&= (a(x,y)+ib(x,y))(dx+idy) \\
&= (adx-bdy)+i(bdx+ady).
\end{aligned}
$$

则有

$$
d\omega=\left\{-\left(\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\right\}dxdy,
$$

因而，特别地，$d\omega=0$当且仅当

$$
\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial x},\quad \frac{\partial b}{\partial x}=-\frac{\partial a}{\partial y}.
$$

我们知道这些等式正是Cauchy－Riemann方程，它们表示$f=a+ib$是z的可微函数。于是对于在开集$U\subset C$上可微的f和任意的$\phi\in C_2^1(U)$，根据上述，分别取实部和虚部，则有

$$
\int_{\partial\phi}\omega=\int_{\phi}d\omega=0.
$$

当然，这也是Cauchy定理的一种形式。

与前面一样继续进行，便可引出群$\mathscr{H}_c^1(U)$的定义，它是由1-形式$\omega=f(z)dz$构成的群对于由$g'(z)dz$构成的子群的商群，其中f，g在U上都是可微的。（当然，在复变量的情况下，这已蕴涵着无限可微性。）运用线积分，我们得到一个映射

$$
J:\mathscr{H}_c^1(U)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(U),C),
$$

还可以证明它也是一个同构。

如果U是紧致集合K在C中的余集，前一章的对偶定理给定了一个同构

$$
I_2:H_1(U)=H_1(C-K)\longrightarrow h^1(K).
$$

当K是一个有限点集$\{P_1, \cdots, P_N\}$，这可以特别清楚地看出来。因为那时$H^0(K)$是映射族$f: K \to Z$的自由Abel群，这个群由映射e_r

$$\begin{cases} e_r(P_r)=1, \\ e_r(P_s)=0 \quad (r \neq s); \end{cases}$$

所生成；以及 Hom($H^0(K)$, (C) 的一个元素a是由N个复数$a_r = a(e_r)$确定的。现在给定$\omega = fdz$，其中f在U上是全纯的，ω确定了$\mathscr{H}^1_C(U)$的一个元素，我们可以如下来计算$a = J(f)$。

对于每个r，$1 \leqslant r \leqslant N$，有$e_r \in H^0(K)$. $H_1(U)$的元素$I^{-1}_2(e_r)$用小的圈

$$l_r: z = P_r + \varepsilon e^{2\pi i t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

作代表，这种圈环绕P_r一次（参看练习14.5.）则

$$a_r = \int_{l_r} \omega = \oint f(z)dz,$$

当然，f在P_r处具有孤立奇异性，因而有

$$a_r = 2\pi i \operatorname{res}_{P_r} f,$$

其中$\operatorname{res}_{P_r} f$表示$f$在$P_r$处的留数。

进一步的发展

除了上述内容对n维情况的明显推广外，下一步不仅是阐述对于 Euclid 空间的开集，而且是对于流形的结果。一种合适的参考文献是Spivak的书。它给出了 Stokes 定理的一般形式，从而可以定义一个推广定理15.3的映射。说明这个映射是同构的正是de Rham定理；例如，在de Rham和Hodge的书中有定理的证明.后一本书还提供了关于微分形式的进一步的结果，这些结果在这里是不能触及的。对于在复变量情况的一般理论，可参阅 Weil 的书。

Hodge, W.V.D.,《The Theory and Applications of Harmo-

nic Integrals》, Cambridge University Press, 1941 (2nd edn., 1952).

de Rham, G., 《Variétés Différentiables》, Hermann Paris 1955.

Spivak, M., 《Calculus on Manifolds》, Benjamin, New York, 1965.

Weil, A., 《Introduction a l'étude des Variétés Kählérile-nnes》, Hermann, Paris, 1958.

练习和问题

1. 设U是由R^2中的$U(0,2)$内去掉点$(\pm 1,0)$和$(0,\pm 1)$后得到的集合。通过构造适当的1-形式证明定理15.3（的映射）是到上的。

2. 对于1-形式

$$\phi = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

$$\omega = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3,$$

定义

$\phi \wedge \omega = (a_2 b_3 - a_3 b_2) dx_2 dx_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dx_3 dx_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 dx_2$. 计算$\delta(\phi\wedge\omega)$，并用向量分析的语言加以解释。

3. 设U是$\boldsymbol{R}^3$中的单位球体$U(0,1)$。通过推广定理15.3的最后部分，证明课文中描述的映射$\mathscr{H}_i(U) \to \mathrm{Hom}(H_{3-i}(U), \mathbf{R})$都是同构。（这是一般情况的证明中的第一步。）

名词索引

一 画

一致收敛 uniform convergence 95

二 画

二次的 quadric 23

三 画

三角不等式 triangle inequality 1
下确界 infimum 1
上同调 Cohomology 57, 72
上确界 supremum 1
上链 cochain 113
万有性质 universal property 37, 156
子群 subgroup 26

四 画

双射 Bijective 4
开的 open 13
支配 dominate 70
不连通的 disconnected 46
双曲线 hyperbola 47
内部 interior 15
内射 injective map 4
分支 component 65
道路连通分支 path-～ 59
不相交的 disjoint 2
分划 partition 46
分离 separation 115
区间 interval 2
区域 domain 3
区域的不变量 invariance of～ 159

五 画

正合序列 exact sequence 33
可收缩的 contractible 70
可裂的 split 35
对偶定理 duality theorem 137, 170
凸集 convex 49, 73
四元数 quaternion 74
边界 frontier 15
边缘 bordism 168
边缘 boundary 162
1-边缘 1-～ 166
边缘映射 ～ map 166
边缘点 ～point 162
包含 inclusion 6
代数基本定理 Fundamental theorem of Algebra 81

六 画

交叉比 cross ratio 144

交换图表　commutative diagram 4
并集　union　2
扩张　extension　4,86,93
有理函数　rational function　145
有界的　Bounded　3
闭的　closed　15
闭包　closure　15
闭链　cycle　166
1-闭链　1-～　166
同伦　homotopy　70
同伦扩张　～ extension　97
同伦类　～ class　68
同伦等价　～ equivalent　70
同伦提升～lifting　77
同态　homomorphism　9
同构　isomorphism　26
同胚　homeomorphism　9
同调　homology　166
曲面　surface　111,162
曲线　curve　119
雪片曲线　snowflake ～ 128
曲线sin(1/x)～　50,98
简单闭曲线　simple closed ～ 9
Jordan曲线　Jordan ～　9
θ曲线　theta ～　126,151
自然性　naturality　133
重分　subdivision　131,168
纤维丛　fibre Bundle　149
多项式　polynomial　81

七　画

形式　form　177
1-形式　1-～　177
投影　projective　4
垂直投影　orthogonal～ 22
球极投影　stereographic～22
局部性质　local property　53
函子　functor　64
连通的　connected　46
局部道路连通locally path ～52
单连通　simply ～　172
连续　continuous　6
回路　circuit　112
邻域　neighborhood　12
坐标　coordinate　1
齐次坐标　homogeneous～143
余　complement　2
余集的分支complementary component

八　画

空间　space　6
空集　empty set　2
拓扑　Topology　6
取值范围　codomain　3
限制　restriction　4
到上映射　surjective　4
弧　arc　9
直和　direct sum　28
线积分　line integral　176

九　画

指数　index　169
树　tree　112
图　chart　148,162

图象 graph 106
映射 map 3
映射度 degree of ~79,83
映射的分量 component of~7
映射的定义域 domain of~3
恒同映射 identity ~4
投影映射 projective~ 4
常值映射 constant~ 4
覆迭映射 covering~ 84
选择公理 axiom of choice 4
矩阵记号 Matrix notration 29

十 画

留数 residue 187
流形 manifold 126,161
核 kernel 29
圆 circle 9
圆盘 disk 3,11
紧致 compact 18
秩 rank 32, 41
乘积 product 3
空间的~~of spaces 11
集合的~~ of sets 3
群的~~of groups 28
射影几何 projective geometry144
射影几何基本定理 Fundamental theorem of~ 144
射影空间 projective space 149
射影线 projective line 144
离散的 discrete 15

十 一 画

旋度 curl 185
粘贴 attaching 106,111,119
球面 sphere 3
球体 ball 11
基点 base point 146
梯度 grad 185
圈 loop 88

十 二 画

道路 path 49
提升 lifting 75, 86
椭圆 ellipse 49
散度 div 185
逼近 approximation 131
嵌入 embedding 9
链 chain 166
链同伦 ~homotopy 166
链映射 ~ map 166
链群 ~group 166
象 image 3, 27
等价 equivalencl 5
等价关系 ~ relation 5
等价类 ~class 5

十三画以上

群 group 25
自由Abel群free Abelian~27,41
无限循环群infinite cyclic ~27
商群 quotient ~ 156
拓扑群 topological ~ 71
零伦 nullhomotopy 66
覆迭同伦性质 covering homotopy property 96

Abel群 Abelian group 25
Alexander对偶 ~duality124,137
Alexander引理 ~ lemma 175
Brouwer不动点定理 ~fixed point theorem 82
Cauchy定理 ~ theorem 165,186
de Rham定理 ~ theorem 182
Dieudonne 153
Doyle 159
Eilenberg判别准则~ criterion116
Euler公式 ~formula 107,139
Hawaii耳环 Hawaiien earring128
Heine-Borel定理 ~theorem 20
Hopf 映射 ~ map 147
Jordan 曲线 ~ curve 9
Jordan 定理~ theorem 137
Mayer-Vietoris 序列~sequence 99,167
Monodromy定理 ~ theorem 88
R^2中的区域 domain in R^2 3
Schoenflies定理 ~theorem 161
Tietze扩张定理 ~extension theorem 93
Wada 湖 ~ lakes 128
Weierstrass M-判别法 ~M-test 9

记 号 索 引

$\cup, \cap, \subset$ [illegible]
$\arg z$ 1
$\mathbf{C}$ 1
D^n 3
$d(x, y)$ 1
δ^* 99
$e: R \to S^1$ 75
$e: \mathbf{C} \to S^2 - (0, 0, 1)$ 142
$e: R^n \to S^n - \{N\}$ 158
$\in$ 2
$f|A$ 4
$f(A)$ 5
$f(B)$ 5
f_*, f^* 58, 60, 71
$F(X)$ 41
ϕ 2
$f*g$ 84
$f \circ g$ 3
$\mathrm{Hom}(A, X)$ 26, 28
$H_0(X)$ 63
$H^0(X)$ 57
$\tilde{H}_0(X)$ 124
$\tilde{H}_n(X)$ 157
$H_1(X)$ 166
$H^1(X)$ 70
$\mathscr{H}^0(U)$ 182
$\mathscr{H}^1(U)$ 182
i 1
i' 1
$\mathrm{Im} z$ 1
nf 1
I 2
$[a, b], [a, b[,]a, b[$ 2
$\mathrm{Map}(X, Y)$ 5
N 144
p_1, p_2 4
$P_n(R), P_n(C)$ 149
$\pi_0(X)$ 59
R 1
R^n 1
R^+, R_-, R^n_+ 2, 3
$\mathrm{Re} z$ 1
sup 1
$\mathbf{X}$ 110
$s \to t$ 3
$U_x(x, \delta), U(x, \delta)$ 8, 13
$\{x: P(x)\}$ 2
$X - Y$ 2
$X \times Y$ 3
$X \amalg Y$ 73
$X \vee Y$ 85, 103
$|z|$ 1
$\mathbf{Z}$ 2

[illegible]

[illegible]